

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in
Fisica

**Sviluppo di metodi di analisi dati per l'osservazione di onde
gravitazionali impulsive nell'ambito della rete di rivelatori
criogenici risonanti**

Tesi di Laurea di
Emanuele Rocco

Relatore:

Prof. Massimo Cerdonio

Correlatore:

Dr. Giovanni Andrea Prodi

Anno Accademico 1999-2000

Ringrazio

Giovanni per avermi assistito nella elaborazione e nella stesura di questa mia tesi; Jean per non avermi ancora scacciato di casa; Lucio per avermi spesso illuminato le idee; Luca senza il quale starei ancora studiando le sorgenti; la Livia che mi ha costretto a scrivere questa mia tesi; Antonello per essere sempre stato disponibile a chiarire i miei dubbi e Massimo per aver avuto pazienza. Ringrazio insomma tutto il gruppo AURIGA con il quale ho svolto questo mio lavoro di tesi.

Ringrazio poi tutti coloro, amici e familiari, che hanno fatto il tifo, e soprattutto l'Ilaria, Daniele, Barrogio, Monica, Riccardo e tanti altri..

E ringrazio Mariangela.

All'Io bambino

Indice

Prefazione	6
1 Introduzione	7
1.1 Le onde gravitazionali	8
1.2 Emissione d'onde gravitazionali	10
1.3 Principio di rivelazione delle o.g.: un modello semplificato	11
1.4 Sorgenti di rumore	13
1.5 Principi dell'analisi dati	15
2 Sorgenti d'onde gravitazionali	17
2.1 Binarie coalescenti:	18
2.1.1 Fase coalescente	18
2.1.2 Collisione	20
2.2 Supernovae:	24
2.2.1 Collasso del nucleo:	24
2.3 Stelle di neutroni ruotanti:	26
2.3.1 Instabilità di CFS e r modi:	26
2.4 L'impulso standard	27
3 IGEC	31
3.1 Introduzione	32
3.1.1 Protocollo scambio dati	32
3.1.2 Caratteristiche osservatorio	32
3.2 Periodi di osservazione	37
3.3 Distribuzione in sigma	40
3.4 Distribuzione in ampiezza	44
3.5 Distribuzione dei tempi d'arrivo	45
3.6 Incertezze sull'ampiezza	53
4 Metodi di analisi dati	55
4.1 Ricerca coincidenze	55

4.1.1	Tecnica utilizzata	56
4.2	Predizioni	58
4.2.1	Previsione teorica	58
4.2.2	Shift	60
4.2.3	Compatibilità coincidenze trovate con le previsioni	62
4.2.4	Fluttuazioni	63
4.3	Estensione metodi tempo-ampiezza	63
4.3.1	Predizione accidentali $H_{o.g.} > H_{thr}$	64
4.4	Tecniche per limiti superiori	64
4.4.1	In ampiezza	64
4.4.2	Sul rate	65
5	Risultati osservativi	67
5.1	Coincidenze	67
5.2	Potenzialità osservatorio	73
5.3	Limiti superiori in ampiezza	79
5.4	Limiti superiori sul rate	80
	Conclusione	82
	Bibliografia	84

Prefazione

Una delle osservazioni sperimentali della fisica contemporanea più ricche di fascino e di imprevedibili sviluppi futuri è la osservazione diretta delle onde gravitazionali (o.g.) in quanto tale radiazione trasporta informazioni uniche sulle sue sorgenti astrofisiche e costituisce una prova importante della Relatività Generale. Nei primi anni 60 [1] è stata iniziata l'attività sperimentale in questo direzione e attualmente molti rivelatori risonanti sono in presa dati già da alcuni anni e i rivelatori interferometrici saranno funzionanti entro pochi anni.

Attualmente, per la prima volta, si è in grado di osservare il Centro Galattico con molti rivelatori d'o.g. in funzione contemporaneamente aumentando dunque la confidenza di rivelazione di eventuali segnali gravitazionali: quest'ultimi non hanno caratteristiche distintive rispetto al rumore del rivelatore e sono attesi essere in ampiezza comparabili del rumore stesso; per avere una buona confidenza di rivelazione di un segnale gravitazionale è quindi fondamentale poter essere in presa dati con più rivelatori aventi rumore non correlato fra loro.

Sono cinque i rivelatori risonanti operativi attualmente: ALLEGRO (LSU, Baton Rouge, Louisiana, USA)[2], AURIGA (INFN, Legnaro, Italia)[3], EXPLORER (INFN, CERN)[4], NAUTILUS (INFN, Frascati, Italia)[5] e NIOBE (NSF, Perth, Australia)[6].

Per la prima volta è stato possibile coordinare i suddetti gruppi di ricerca e realizzare un'analisi dati congiunta utilizzando un protocollo di scambi dati comune. Il 4 Luglio del 1997 infatti è stato comunemente concordato il protocollo di scambio dati chiamato "International Gravitational Events Collaboration" (IGEC) [7] stabilendo gli obiettivi, le modalità di scambio dati e la politica di pubblicazione dei risultati.

Con questo lavoro di tesi la collaborazione IGEC è diventata operativa a tutti gli effetti ed è stata realizzata una prima analisi sistematica delle osservazioni dei rivelatori nel 1997-98.

Questo testo si sviluppa dunque nelle seguenti sezioni:

- **Capitolo 1:** viene introdotto il concetto di onde gravitazionali, illustrando brevemente come la relatività generale ne preveda l'esistenza, da cosa siano generate e come possano interagire con un sistema fisico. Quindi ci si sofferma sui principi di funzionamento e dell'analisi dati di un rivelatore risonante di o.g. .
- **Capitolo 2:** si vedono brevemente quali sono le possibili sorgenti astrofisiche di o.g. rilevabili da un rivelatore risonante; se ne dà dunque l'energia emessa in masse solari e lo spettro di emissione nel caso le sorgenti siano situate alla distanza del Centro Galattico

(10kpc) ; viene detto con quale rate ci si aspetta emettano e se emettano anche onde elettromagnetiche (X, γ) o neutrini rilevabili. Si dimostra infine come le o.g. provenienti da alcune delle sorgenti più importanti possano essere viste da una rivelatore a barra risonante come dei segnali impulsivi di frequenza $\sim 1kHz$ e di durata $\sim 1ms$.

- **Capitolo 3:** in questo e nei seguenti capitoli viene presentato il contributo di questo lavoro di tesi all'analisi dei dati scambiati sotto il protocollo IGEC. In questo capitolo in particolare si studiano le proprietà statistiche dei dati scambiati dai vari rivelatori e le prestazioni dell'osservatorio (periodo di osservazione, sensibilità, ecc..). Si descrivono dunque le tecniche utilizzate per l'analisi dei dati dei singoli rivelatori.
- **Capitolo 4:** capitolo essenzialmente tecnico in cui vengono illustrati i metodi sviluppati durante questo lavoro di tesi per ricercare le coincidenze fra N-rivelatori e per stimare la probabilità che quest'ultime siano dovute solo al caso; vengono presentati dunque due diversi approcci, uno teorico ed uno empirico, con cui è possibile stimare il numero di coincidenze casuali tra i dati di N-rivelatori. Si descrivono infine i principi e le tecniche utilizzate per porre dei limiti superiori al rate e alle ampiezze delle onde gravitazionali passanti per la Terra durante i periodi di osservazione nel 1997-98.
- **Capitolo 5:** utilizzando le tecniche presentate nel capitolo precedente si analizzano sistematicamente i dati scambiati IGEC relativi al 1997-98. Viene provato per la prima volta che i dati dei candidati eventi per la rivelazione dei 5 diversi rivelatori non sono temporalmente correlati fra loro. Si ricercano eventuali candidati eventi gravitazionali, ottenendo esito nullo. Si illustrano dunque le potenzialità dell'osservatorio IGEC in termini di falsi allarmi attesi. Viene dato poi un esempio di come IGEC sia in grado di dare un limite superiore in ampiezza sulle o.g. interagenti con i rivelatori in un preciso intervallo di tempo. Vengono posti infine nuovi limiti superiori al flusso di onde gravitazionali incidenti sulla Terra.

Capitolo 1

Introduzione

In questo primo capitolo introdurremo il concetto di onde gravitazionali (o.g.), illustrando brevemente come la relatività generale ne preveda l'esistenza, da cosa siano generate e come possano interagire con un sistema fisico. Quindi ci soffermeremo sui principi di funzionamento e dell'analisi dati di un rivelatore risonante di o.g.

1.1 Le onde gravitazionali

Le due fondamentali equazioni tensoriali della Relatività Generale [8] sono:

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^2} \mathbf{T} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

dove \mathbf{G} è il tensore di Einstein e \mathbf{T} il tensore energia momento della materia, $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3/(s^2 \cdot kg)$ la costante di gravitazione universale e $c = 2.998 \times 10^8 m/s$ la velocità della luce. La eq.1.2 ci riduce da 10 a 6 il numero di equazioni indipendenti dell'eq.1.1; quindi restano liberi 4 gradi di libertà dovuti al fatto che le equazioni della fisica, e in particolare l'eq.1.1, devono essere valide in tutti i sistemi di coordinate (Principio di Covarianza Generale); scegliere un sistema di coordinate significa appunto fissare questi 4 gradi di libertà, detta scelta di gauge. Scelto quindi un sistema di coordinate opportuno si vede che la eq.1.1 e 1.2 diventano:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\alpha\beta} \quad (1.3)$$

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.4)$$

con $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$ con $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\sigma\beta}^\sigma$ e $R = R^\sigma_\sigma$.

Se il campo gravitazionale è debole la metrica si può esprimere come una perturbazione della metrica piatta di Minkowski, $\eta_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \text{ con } |h_{\alpha\beta}| \text{ e } |\partial_\alpha h_\beta^\alpha| \ll 1$$

Il tensore di Riemann diviene:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \partial_\delta \partial_{[\alpha} h_{\beta]\gamma} - \partial_\gamma \partial_{[\alpha} h_{\beta]\delta} \quad (1.5)$$

dove $[\alpha, \beta]$ antisimmetrizza sugli indici α e β [9].

La eq.1.5 è invariante per trasformazioni infinitesime di coordinate del tipo :

$$x'_\alpha = x_\alpha + \epsilon_\alpha(x) \text{ t.c. } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \epsilon_\alpha(x) \rightarrow 0$$

dette trasformazioni di gauge.

Posto ϵ_α tale che:

$$\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \text{ (Gauge di Lorentz)} \quad (1.6)$$

dove $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, la eq.1.3 diviene l'equazione di Einstein linearizzata:

$$\square_\eta \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\alpha\beta} \quad (1.7)$$

dove $\square_\eta = \eta^{\tau\nu}\partial_\tau\partial_\nu$.

Nel vuoto ($T_{\alpha\beta} = 0$) la 1.7 prevede l'esistenza di soluzioni d'onda del tipo:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} e^{ik_\rho x^\rho}$$

che rappresentano delle deformazioni della metrica che si propagano lungo geodetiche nulle ($k_\rho k^\rho = 0$) come le onde elettromagnetiche.

Inoltre per le 4 condizioni di gauge (eq.1.6) $\bar{h}_{\alpha\beta}$ hanno solo 6 componenti indipendenti e ampiezza e vettore d'onda sono perpendicolari, $A_{\alpha\beta} k^\beta = 0$. Si fissa ora la direzione di propagazione dell'onda gravitazionale, lungo l'asse x_1 cioè $\bar{h}_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta}(x_0 - x_1)$, e si sfrutta il principio di equivalenza: con un cambio di coordinate appropriato¹, si elimina le componenti di h in x_0 e x_1 limitando a due dunque le uniche componenti indipendenti della metrica. Si ottiene in questo sistema di coordinate (detto "TT gauge") che $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$ e che le ampiezze indipendenti sono $h_+ = h_{22} = -h_{33}$ e $h_X = h_{23} = h_{32}$.

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_X \\ 0 & 0 & h_X & -h_+ \end{pmatrix}$$

Da notare che la traccia di $h_{\alpha\beta}$ è nulla.

La metrica risulta dunque essere:

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + (1 + h_+)dx_2^2 + (1 - h_+)dx_3^2 + 2h_X dx_2 dx_3$$

¹ $x'' = x' + \epsilon'$, per esempio $\square_\eta \epsilon' = 0$

1.2 Emissione d'onde gravitazionali

Seguendo l'analogia con il caso dell'elettromagnetismo è possibile cercare una soluzione dell'equazione di Einstein con l'uso di integrali ai potenziali ritardati ($t = cx_0$)[8]:

$$h_{\alpha\beta}(\bar{x}, t) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{T_{\alpha\beta}(t - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c}, \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3x' \quad (1.8)$$

Si pone quindi l'origine del sistema di coordinate della TT gauge dentro o vicino alla sorgente, che si sceglie essere di raggio r piccolo rispetto alla lunghezza d'onda delle onde gravitazionali emesse ($r \ll \lambda_{gw}$) e muoversi di moto lento ($\frac{v}{c} \ll 1$). Se la sorgente è a grande distanza dall'osservatore ($d = |x| \gg \lambda_{gw}$) si sviluppa la eq.1.8 in serie di Taylor rispetto a $t' = t - d$ e ci si ferma al primo ordine, ottenendo :

$$\begin{cases} h_{00} = \frac{4M}{d} \\ h_{0i} = 0 \\ h_{ij} = \frac{2G}{dc^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{M}_{ij}^{TT} \text{ con } i, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.9)$$

dove \bar{M}_{ij}^{TT} è la componente trasversa e a traccia nulla del momento della densità, T^{00} , della sorgente di massa M :

$$\begin{aligned} M_{ij}(t') &= \int T^{00}(t', y') y_i y_j d^3y \\ \bar{M}_{ij} &= M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_\sigma^\sigma \text{ (Traccia nulla)} \\ \bar{M}_{ij}^{TT} &= \perp_j^k \bar{M}_{kl} \perp_j^l - \frac{1}{2} \perp_{ij} \perp^{kl} \bar{M}_{kl} \text{ (Trasversa)} \end{aligned}$$

con $\perp_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ proiettore perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda $n_j = \frac{x_j}{|x|}$. La eq.1.9 è la formula di quadrupolo che lega l'accelerazione del quadrupolo della sorgente alla radiazione gravitazionale emessa. Si trova quindi che:

$$\begin{cases} h_+ = + \frac{G}{c^4 d} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{M}_{22} \\ h_X = + \frac{G}{c^4 d} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{M}_{23} \end{cases} \quad (1.10)$$

Nel vuoto la metrica consiste in un fondo $g_{\alpha\beta}$ e in una perturbazione d'onda $h_{\alpha\beta}$, tensore rispetto a $g_{\alpha\beta}$.

Si può trattare il campo $h_{\alpha\beta}$ come un vero e proprio campo "materiale" con un proprio tensore energia-momento, dato da:

$$T_{\alpha\beta}^{gw} = \frac{c^5}{G 32\pi} h_{\mu\nu;\alpha} h_{\beta}^{\mu\nu} \text{ (Tensore di Isaacson)} \quad (1.11)$$

Se si adotta quindi la TT gauge ed si esprime quindi $T_{\alpha\beta}^{gw}$ rispetto ad un fondo piatto $\eta_{\alpha\beta}$ si può sostituire la derivata semplice a quella covariante nella eq.1.11.

$$T_{01}^{gw} = \frac{c^3}{16\pi G} (\dot{h}_X^2 + \dot{h}_+^2) \quad (1.12)$$

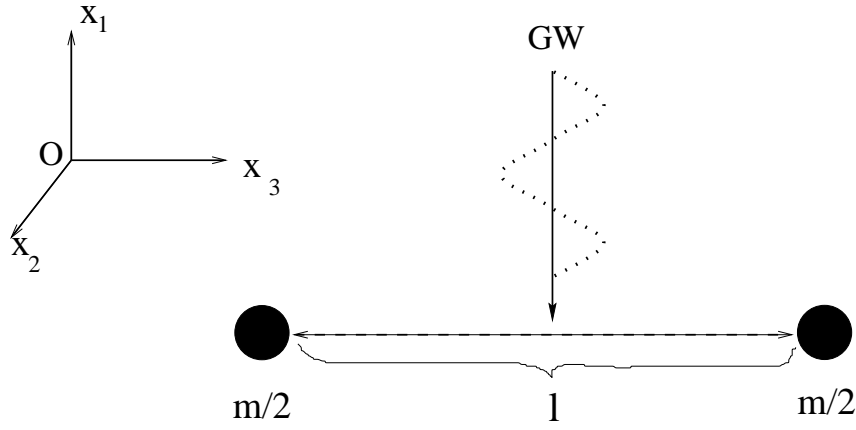


Figura 1.1: Due masse ottimamente orientate rispetto all'onda gravitazionale in arrivo da \$x_1\$

che nel caso di un onda piana di frequenza \$\nu\$ con \$h_+ = h_X\$, mediando su un periodo \$(1/\nu)\$, diventa:

$$T_{01}^{gw} = \frac{c^3 \pi}{4G} h^2 \nu^2 = \frac{4mW}{M^2} \left(\frac{\nu}{kH_z} \right)^2 \left(\frac{h}{10^{-22}} \right)^2$$

Infine sostituendo la eq.1.9 nella 1.11 e integrando ancora il flusso su di una sfera si ottiene la luminosità della sorgente in funzione del suo momento di quadrupolo[8]:

$$L = \frac{dE}{dt} = \int_{\partial s_{fera}} F_{gw} d\Sigma = \frac{G}{5c^5} \overset{\dots}{M}^{jk} \overset{\dots}{M}_{jk} \quad (1.13)$$

1.3 Principio di rivelazione delle o.g.: un modello semplificato

Vediamo ora come la radiazione gravitazionale agisce su due particelle libere ferme di massa \$m/2\$ lungo l'asse \$x_3\$ del sistema di riferimento del laboratorio e le cui rispettive posizioni distano di un vettore \$\xi_\alpha = (0, 0, 0, l + \xi)\$, . Essere liberi e fermi significa essere su una geodetica \$\gamma(t)\$ con vettore tangente \$\dot{\gamma}^\beta = \delta^{\beta 0}\$, dunque l'equazione della deviazione relativa diventa:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \dot{\gamma}^\beta \dot{\gamma}^\gamma \xi^\delta = R^\alpha_{00\delta} \xi^\delta$$

Si conosce il tensore di Riemann solo nel sistema di coordinate della TT gauge, ma si possono ricalcolare le componenti nel sistema di coordinate del laboratorio applicando le matrici di trasformazioni \$|\partial x^\alpha / \partial x^{TT\beta}|\$. Se si centrano le coordinate TT su quelle del laboratorio e le si orienta in modo che coincidano con quelle del laboratorio con la precisione di \$O(|h_{\alpha\beta}|) \ll 1\$ al momento della interazione \$t^{TT} = t = 0\$, la trasformazione é:

$$\frac{\partial x^{TT\alpha}}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta + O(|h_{\alpha\beta}|)$$

Quindi con ottima precisione, usando la eq.1.5

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{dt^2} = g^{\alpha\iota}(\partial_\delta\partial_{[\iota}h_{0]0} - \partial_0\partial_{[\iota}h_{0]\delta})\xi^\delta = \frac{1}{2}\ddot{h}_\delta^\alpha\xi^\delta \quad (1.14)$$

Nel caso di fig.1.1 l'unico termine rilevante è :

$$\xi^3 = \frac{l}{2}\ddot{h}_+ \quad (1.15)$$

Si suppone ora che i due punti non siano liberi ma che siano vincolati l'uno all'altro da una molla, di cui l'onda gravitazionale non ne cambia le proprietà al primo ordine in $|h_{\alpha\beta}|$, e si pensa sia presente anche una forza viscosa; si ottiene l'equazione di un oscillatore smorzato con ω_0 , frequenza di risonanza, e Q , fattore di merito:

$$\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{l}{2}\ddot{h}_+ \quad (1.16)$$

Poichè l'oscillatore potrebbe non essere perfettamente orientato rispetto all'onda gravitazionale, la distanza tra le due masse risentirà degli effetti delle due polarizzazioni dell'onda h_+ e h_X ; dalla eq.1.14 si trova che è sufficiente sostituire h_X con h definito dalla:

$$h = h_+ \sin^2\theta \cos(2\phi) - 2h_X \sin^2\theta \sin(2\phi) \quad (1.17)$$

dove θ è l'angolo tra la direzione di propagazione dell'onda e l'asse longitudinale dell'oscillatore e ϕ è l'angolo sul piano di polarizzazione dell'onda tra l'asse longitudinale dell'oscillatore e l'asse x_3 del sistema di coordinate dell'onda.

Passando alle trasformate di Fourier $\tilde{\xi}(\omega)$ e $\tilde{h}(\omega)$ si trova:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\omega) &= \frac{l}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega\omega_0}{Q}} \tilde{h}(\omega) = \\ &= \Phi(\omega)\tilde{f}(\omega) \end{aligned}$$

dove è stata definita la funzione di trasferimento $\Phi(\omega)$ e $\tilde{f}(\omega)$:

$$\Phi(\omega) = -\frac{1}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (1.18)$$

$$\tilde{f}(\omega) = -\frac{l m \omega^2}{2} \tilde{h}(\omega) \quad (1.19)$$

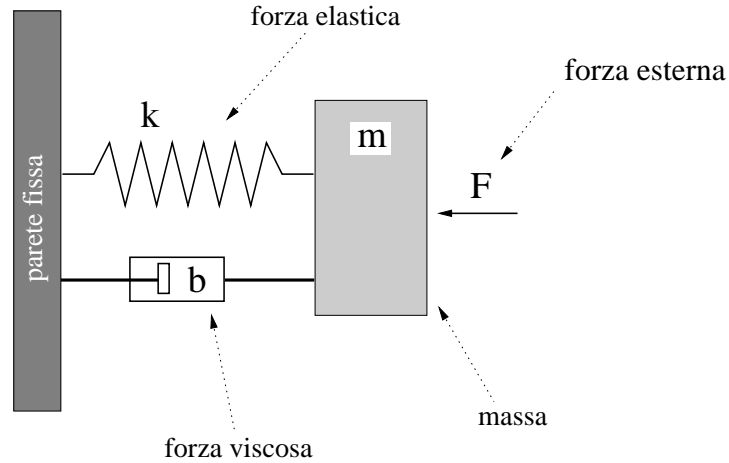
I valori di ω_1 e ω_2 per cui $|\Phi(\omega)|^2 = \frac{|\Phi(\omega)_{max}|^2}{2}$, sono tali che $\omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}$ che è la larghezza della banda di risonanza. Ora l'eq.1.18 che nello spazio dei tempi diviene:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t') f(t-t') dt' \quad (1.20)$$

dove $\phi(t)$ e $f(t)$ sono le antitrasformate di Fourier rispettivamente di $\Phi(\omega)$ e $\tilde{f}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0/Q)} d\omega = \\ &= \frac{1}{m\omega_0} e^{-\frac{t\omega_0}{2Q}} \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Figura 1.2: Oscillatore armonico forzato smorzato di massa m , con costante elastica $k = m\omega_0^2$, coefficiente viscoso $b = \frac{m\omega_0}{Q}$, sottoposto ad una forzante esterna F



Se si suppone infine che l'onda gravitazionale sia di tipo $h(t) = f_0\delta(t)$, cioè:

$$f(t) = f_0\delta(t) = \frac{mlH_0\omega_0^2}{2}\delta(t) \quad \tilde{f}(\omega_0) = f_0 \quad (1.21)$$

Dalla eq.1.20 si trova infine:

$$\xi(t \geq 0) = -\frac{l}{2}H_0e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (1.22)$$

Da notare quindi come l'effetto dell'onda gravitazionale sull'oscillatore è indipendente dalla massa del sistema oscillante.

1.4 Sorgenti di rumore

In laboratorio le due masse non sono soggette solo all'accelerazione dell'onda gravitazionale ma anche all'azione del rumore, come per esempio quello browniano f_{th} .

Nel caso reale quindi l'eq.1.16 diventa:

$$m\ddot{\xi} + \frac{m\omega_0}{Q}\dot{\xi} + m\omega_0^2\xi = \frac{lm}{2}\ddot{h} + f_{th} \quad (1.23)$$

supponendo per il momento $\frac{4lm}{\pi^2}\ddot{h} \ll 2f_{th}$.

Definendo lo spettro di potenza $S(\omega)$ come la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R(t)$ del rumore $f(t)$ si ha:

$$S_{f_{th}f_{th}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{f_{th}f_{th}} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1.24)$$

$$R_{f_{th}f_{th}}(\tau) = \langle f_{th}(t+\tau)f_{th}(\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_{th}(t+\tau)f_{th}(\tau) dt$$

e ha varianza:

$$\sigma_{f_{th}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} S_{f_{th}f_{th}}(\omega) d\omega$$

dove $\Delta\omega$ è la larghezza di banda del modo di oscillazione principale. Lo spettro di potenza $S_{\xi_{th}\xi_{th}}(\omega)$ all'uscita del nostro oscillatore è:

$$S_{\xi_{th}\xi_{th}}(\omega) = |\Phi(\omega)|^2 S_{f_{th}f_{th}}(\omega)$$

Se lo spettro del rumore è costante (rumore bianco) come nel caso del rumore browniano, si può conoscere la varianza anche di ξ :

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f_{th}f_{th}}(\omega) |\Phi(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} \frac{Q S_{f_{th}f_{th}}}{m^2 \omega_0^3} \quad (1.25)$$

con:

$$S_{f_{th}f_{th}}(\omega) = S_{f_{th}f_{th}} = 2K_B T \frac{m\omega_0}{Q}$$

e T la temperatura termodinamica del sistema.

Come si vede dunque è importante avere un oscillatore con m grande in modo da diminuire l'influenza del rumore termico sul sistema. Per ridurre l'effetto del rumore termico sul sistema è dunque necessario minimizzare il rapporto T/m . Non c'è tuttavia solo il rumore termico che limita la sensibilità del rivelatore: nel momento infatti in cui si effettua la misura di ξ si apporta inevitabilmente del rumore all'oscillatore; rumore che è sia in forza che in spostamento, con i relativi spettri $S_{f_n f_n}$, $S_{\xi_{ba}\xi_{ba}}$ che devono soddisfare al principio di indeterminazione:

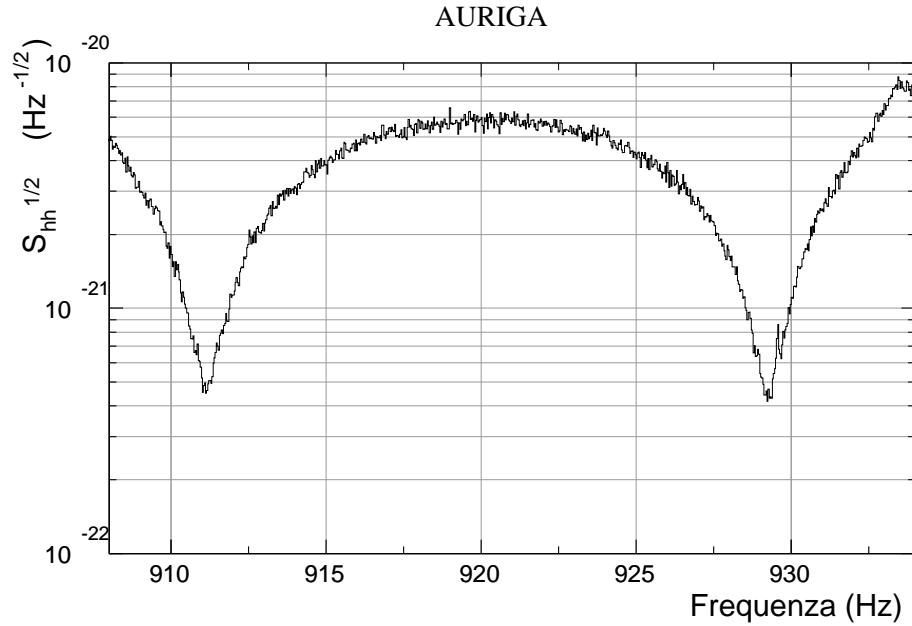
$$S_{\xi_{ba}\xi_{ba}}(\omega) S_{f_n f_n}(\omega) \geq \frac{\hbar^2 \omega^2}{4}$$

Quindi non è possibile mai fare una misura di amplificazione di ξ senza perturbare il sistema con entrambi i tipi di rumore. Considerando il rumore in spostamento come causato da una sorgente di rumore in forza con spettro $S_{\xi_{ba}\xi_{ba}}(\omega)/|\Phi(\omega)|^2$, il rumore totale in forza è dunque

$$S_{hh} = S_{\xi_{ba}\xi_{ba}}(\omega)/|\Phi(\omega)|^2 + S_{f_n f_n} + S_{f_{th}f_{th}}$$

considerando anche lo spettro del rumore termico $S_{f_{th}f_{th}}$.

Figura 1.3: $S_{hh}^{1/2}$ di AURIGA calcolato dai dati del giorno 4 luglio 1999.



1.5 Principi dell'analisi dati

Si suppone dunque $\xi(t)$ essere:

$$\xi(t) = H_0 \xi_h(t) + n(t)$$

con $n(t)$ rumore a media nulla $\langle n(t) \rangle = 0$, con funzione di autocorrelazione $R_{nn}(f)$ e spettro di potenza $S_{\xi\xi}$, e $H_0 \xi_h(t)$ segnale gravitazionale con trasformata di Fourier $H_0 \tilde{\xi}_h(\omega)$.

Si ricerca dunque un filtro $w(t)$ tale che applicato a $\xi(t)$:

$$x_W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \tau) \xi(t) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) \tilde{\xi}(\omega) d\omega \quad (1.26)$$

abbia

- Il valore medio $\langle x_W(t) \rangle = H_0$
- La varianza $\sigma_{x_W}^2$ minima.

Si trova:

$$W(\omega) = \sigma_{x_W}^2 \frac{e^{-i\omega T} \tilde{\xi}_h(\omega)^*}{S_{\xi\xi}} \quad (\text{Filtro di Wiener}) \quad (1.27)$$

$$\sigma_{x_W}^2 = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\xi}_h(\omega)|^2}{S_{\xi\xi(\omega)}} d\omega} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{f}_h(\omega)|^2}{S_{ff(\omega)}} d\omega} \quad (1.28)$$

ricordando che $H_0 \tilde{\xi}_h(\omega)$ è la trasformata di Fourier dello spostamento delle masse dovuto solo all'effetto di un onda gravitazionale in arrivo al tempo $t = 0$.

Si può dimostrare che un cilindro di lunghezza L e massa M è equivalente ad un oscillatore con:

$$m = \frac{M}{2} ; l = \frac{4}{\pi^2}L ; \omega_0 = \frac{\pi v_s}{L} \quad (1.29)$$

con v_s la velocità del suono nel cilindro.

In tal caso essendo quest'ultima fissata dai materiali usati a dei valori prossimi a $5 \times 10^3 m/s$, scelta la frequenza di risonanza ω_0 resta dunque determinata anche la lunghezza della barra. Si suppone ora che la forza gravitazionale agente sul cilindro sia impulsiva del tipo eq.1.21, con tempo di arrivo t_A , applicando il filtro di Wiener trovo $x_W(t)$ molto simile all'eq.1.22:

$$x_W(t) = -\frac{2L}{\pi^2}H_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q_{PD}}(t-t_A)} \omega_0 \cos(\omega_0 t - \omega_0 t_A) \quad (1.30)$$

$$(1.31)$$

con

$$Q_{PD} = \frac{1}{m\omega_0^2} \sqrt{\frac{S_{ff}}{2S_{\xi_{ba}\xi_{ba}}}} \quad (1.32)$$

Definendo il "Signal to Noise Ratio" (SNR) come:

$$\text{SNR} \equiv \frac{x_W}{\sigma_{x_W}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{f}(\omega)|^2}{S_{hh}(\omega)} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.33)$$

la minima ampiezza gravitazionale rilevabile H_{min} è quella tale che il suo SNR sia unitario. Supponendo che il segnale sia sempre impulsiva si trova che:

$$H_{min} = \frac{1}{8L\nu_0^2} \sqrt{\frac{K_B T_{eff}}{M}} = \frac{1}{8L\nu_0^2} \sqrt{\frac{E_s}{M}} \quad (1.34)$$

dove E_s è l'energia dell'onda gravitazionale al rivelatore. Il filtro di Wiener è in grado di risolvere 2 impulsi a patto che siano separati da un tempo di circa 3 tempi di Wiener τ_W , definito da $\tau_W = \frac{2Q_{PD}}{\omega_0}$.

In conclusione ora per ogni evento si ottiene dal filtro di Wiener il tempo d'arrivo t_A , l'ampiezza spettrale $H_0(Hz^{-1})$, il suo errore σ_{ξ_W} . Un rivelatore a barra risonante come AURIGA, in realtà è un sistema molto più complicato di un semplice oscillatore armonico con una sola massa oscillante. Infatti per rivelare le oscillazioni della barra c'è un sistema di trasduzione-amplificazione del segnale. Il trasduttore di spostamento è di tipo risonante ed è accoppiato come un secondo oscillatore al cilindro, avendone con la stessa frequenza di risonanza. Il doppio oscillatore barra-trasduttore avrà dunque frequenze di risonanza date da:

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_{trasduttore}}{m_{barra}}} \right)$$

La S_{hh} di AURIGA (fig.1.3) presenta infatti dei minimi pronunciati in corrispondenza delle due risonanze $\omega_{\pm} = (912Hz, 930Hz)$.

Capitolo 2

Sorgenti d'onde gravitazionali

In questo capitolo vedremo brevemente quali sono le possibili sorgenti astrofisiche di onde gravitazionali rilevabili da un rivelatore risonante: ne daremo dunque lo spettro di emissione come se fossero situate alla distanza del Centro Galattico (10kpc) e l'energia emessa in masse solari; diremo dunque con quale rate ci aspettiamo emettano ad una distanza 10kpc (o del VIRGO cluster) e se emettano anche onde elettromagnetiche (X,gamma) o neutrini rilevabili. Dimostreremo dunque come le sorgenti più importanti possano essere viste da una rivelatore a barra risonante, come dei segnali impulsivi di frequenza $1kHz$ e di durata $\Delta t = 1ms$.

2.1 Binarie coalescenti:

Le binarie coalescenti, come vedremo sono delle sorgenti d'onde gravitazionali molto importanti: innanzitutto infatti ne conosciamo con ottima precisione le forme d'onda e lo spettro; poi emettendo onde gravitazionali di frequenze comprese tra i 300Hz e il $k\text{Hz}$ sono sorgenti visibili sia dai rivelatori interferometrici come VIRGO, LIGO e TAMA sia da rivelatori risonanti.

Inoltre l'emissione di onde gravitazionali avviene insieme a quella di neutrini e onde elettromagnetiche ad alte energie (X e gamma); la rivelazione di onde gravitazionali potrebbe dunque essere confermata da altri tipi di rivelazioni astrofisiche.

Il processo di coalescenza di un sistema binario si può dividere in tre fasi :

- Una fase spiraleggiante in cui la scala di tempo della azione della radiazione gravitazionale è molto più grande del periodo orbitale e che finisce quando l'orbita della binaria diventa relativisticamente instabile. Le onde gravitazionali emesse contengono informazioni sulle masse e sugli spin dei due componenti (stelle di neutroni, NS, o buchi neri, BH) del sistema binario, su alcuni parametri dell'orbita della binaria e la sua distanza dalla Terra.
- Verso la fine della fase spiraleggiante il BH e/o la NS diventano dinamicamente instabili e gradualmente la dinamica non è più determinata dalla azione della radiazione gravitazionale e i due corpi cadono in caduta libera l'uno verso l'altro fino alla collisione finale. Vengono a questo punto emesse onde elettromagnetiche e neutrini.
- Non appena l'oggetto finale, BH o NS, si forma, la dinamica altamente non lineare del collasso gradualmente diviene descrivibile in termini di modi di oscillazione de BH o NS finale.

2.1.1 Fase coalescente

Per trovare l'espressione analitica delle forme d'onda emesse da una binaria coalescente si formulano le seguenti ipotesi [10]:

- Si considera il sistema di stelle doppie coalescenti come un sistema di due particelle puntuali newtoniane, che irradiano energia nello spazio sotto forma d'onde gravitazionali.
- Si suppone il sistema osservato e l'osservatore a riposo l'uno rispetto l'altro. Dal solo segnale gravitazionale ricevuto infatti non è possibile stimare il fattore di "Doppler shift" λ . ¹ λ può determinato solo tramite misure della radiazione elettromagnetica proveniente dalla galassia che ospita il sistema binario; dunque la massa misurata non è

¹Infatti $h(t)$ è invariante sotto trasformazioni del tipo: $(\nu, \mathcal{M}, \mu, d, t) \longrightarrow (\nu/\lambda, \mathcal{M}\lambda, \mu\lambda, d\lambda, t\lambda)$.

la vera massa \mathcal{M} del sistema binario, ma

$$\mathcal{M} = (1 + z)\mathcal{M}_{vera} \quad (2.1)$$

dove z è il "cosmological redshift" della sorgente, dato dalla legge di Hubble:

$$z \approx \frac{H_0 d}{c} \quad (2.2)$$

con $H_0 = 55 \text{ kmsec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ la costante di Hubble e d è la distanza tra l'osservatore e la stella osservata.

- Si fissano le variabili che descrivono la posizione e l'orientamento della binaria: (θ, ϕ, ψ) sono gli angoli di Eulero che ci dicono dove rispetto all'osservatore si trova la binaria e i è l'angolo d'inclinazione tra l'asse della binaria e la linea di vista. Poniamo $(\theta, \phi, \psi, i) = (0, 0, 0, 0)$ per analizzare l'evento nelle condizioni più favorevoli ad un miglior rapporto segnale rumore $\frac{S}{N}$.

L'onda gravitazionale emessa da una binaria coalescente ottimamente orientata ha h_+, h_\times in opposizione di fase e date da [10]:

$$\begin{cases} h_+(t) = h_0(\nu) \cos(\psi(t)) \\ h_\times(t) = h_0(\nu) \sin(\psi(t)) \end{cases}$$

con:

$$h_0 = 1.7 \times 10^{-18} \left(\frac{m}{1.4M_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{\nu}{920\text{Hz}} \right)^{-2/3} \left(\frac{10\text{kpc}}{d} \right) \quad (2.3)$$

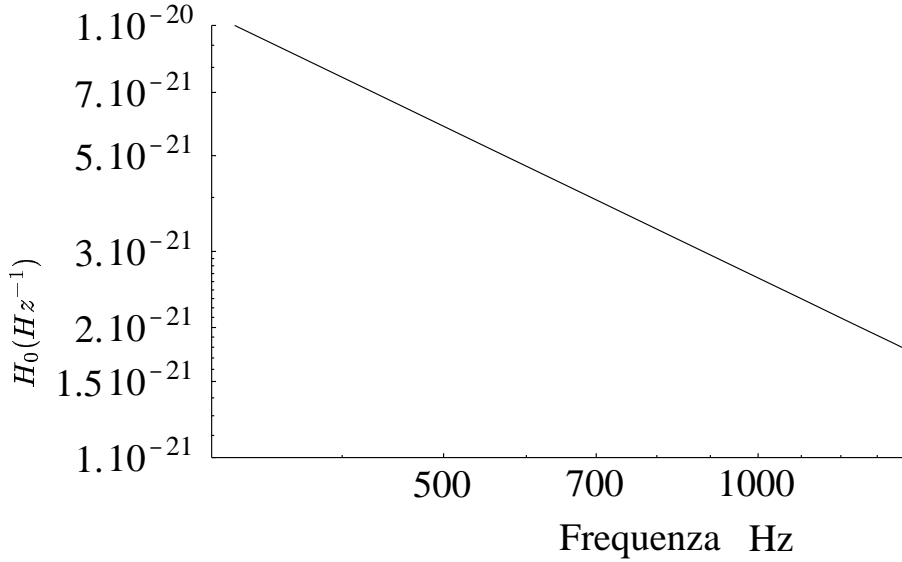
$$\nu(t) = 920\text{Hz} \left[\left(\frac{\nu_c}{920\text{Hz}} \right)^{-8/3} - \left(\frac{m}{1.4M_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{t - t_c}{1\text{s}} \right) \right]^{-3/8} \quad (2.4)$$

$$\psi(t) = \int_{t_a}^t 2\pi\nu(t') dt' \quad (2.5)$$

dove abbiamo supposto che i due corpi spiraleggianti abbiano entrambi massa m ; $\nu_c = 2k\text{Hz}/m$ è la frequenza delle onde gravitazionali al momento in cui la dinamica non è più dominata dalla radiazione gravitazionale e i due corpi iniziano una fase di caduta libera l'uno verso l'altro. Consideriamo ora $h(t) = \sqrt{h_X^2 + h_+^2}$; nel caso in cui la frequenza stia cambiando abbastanza lentamente [10], si può approssimare la sua trasformata di Fourier H_0 con (fig.2.1):

$$|H_0(\nu)| \approx 2.8 \times 10^{-21} \left(\frac{m}{1.4M_\odot} \right)^{5/6} \left(\frac{920\text{Hz}}{\nu} \right)^{7/6} \left(\frac{10\text{kpc}}{d} \right) \text{Hz}^{-1} \quad (2.6)$$

Figura 2.1: $H(\nu)$ per una binaria coalescente ottimamente orientata alla distanza di $10kpc$ e di massa $m = 1.4M_{\odot}$



2.1.2 Collisione

Collisione di stelle di neutroni:

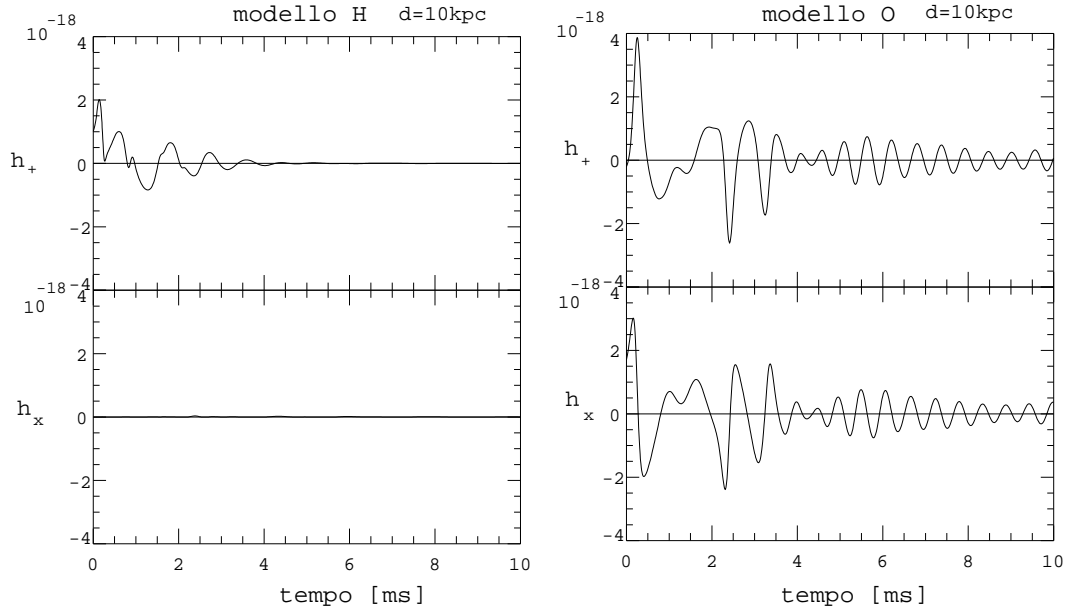
Il collasso di due stelle di neutroni (NS) è stato ultimamente studiato da Ruffert e Janka nel 1998 [11] che ne hanno simulato in 3D la dinamica e i processi radiativi partendo da un approccio Newtoniano. Il loro modello si basa sulle seguenti ipotesi di lavoro:

- Prendono due NS fredde in equilibrio idrostatico di massa $m = 1.63M_{\odot}$, raggio $r = 15km$ e con i baricentri distanti tra loro $42km$.
- Pongono le due NS in caduta libera l'una rispetto all'altra.
- Considerano l'effetto del trasporto radiativo dei neutrini.
- Considerano l'effetto dell'o.g. sulla dinamica del collasso.

Dividono inoltre le simulazioni fatte in due gruppi in base all'angolo iniziale tra la congiungente le due NS e le loro velocità:

- **H** Collisione frontale (“Head-On”) caratterizzato da un forte scontro iniziale ($KT \sim 100MeV$) seguito da 5-6 violente oscillazioni. Dopo circa 3 ms la densità di massa del sistema assume una distribuzione sferica e la temperatura si stabilizza attorno ai 40-50 MeV.
- **O** Collisione laterale (“Off-Center”). In questo caso le NS dopo il primo contatto si separano ancora; tra le due stelle si forma con un ponte di gas denso che continua ad oscillare. Non c'è dunque un violento scontro, le temperature non superano i 40 MeV; tuttavia si ottiene un oggetto compatto fortemente deformato ed in rapida rotazione.

Figura 2.2: Ampiezza $h(t)$ delle onde gravitazionali emesse nella collisione di due NS di massa $1.63M_{\odot}$ [11] ad una distanza di 10kpc: collisione centrale (H) e laterale (O).



Entrambe le due configurazioni emettono onde gravitazionali; O emette una quantità d'energia $E_{o.g.}$ che è 10 volte rispetto a quella emessa da H: l'energia emessa in frazioni di masse solari $\epsilon = E_{og}/M_{\odot}c^2$ è per la configurazione a H e per quella O rispettivamente di 2×10^{-3} e 2×10^{-2} (fig.2.2) . Tuttavia mentre il modello H emetta soprattutto a frequenze del kHz , quello O emette a frequenze più alte $1 - 2kHz$; H inoltre emette anche molta energia sotto forma di neutrini ($L_{neutr.} \sim 4 \times 10^{54} ergs/s$) e quindi la rivelazione delle onde gravitazionale potrebbe coincidere con la rivelazione di neutrini da rivelatori come quelli del Gran Sasso o del SuperKamiokande.

Il rate atteso è di $3 \times 10^{-4}y^{-1}$ nella Galassia, alcuni eventi all'anno a $d = 60Mpc$ [12]

Collisione e oscillazioni smorzate di buchi neri:

Per quanto riguarda lo studio della radiazione proveniente da una binaria di buchi neri (BH), l'analisi si fa più complessa; infatti mentre la fase coalescente è ancora ben descritta da simulazioni basate su codici Newtoniani, la fase della collisione e delle oscillazioni smorzate deve essere analizzata nell'ambito della relatività generale. La dinamica del collasso sarà dunque estremamente complessa e non lineare tanto che ancora oggi non è ben compresa.

Il sistema dovrebbe poi gradualmente divenire un buco nero ruotante. Le ultime onde gravitazionali osservabili sono quelle prodotte dai modi quasi normali di buco nero formatosi. Non appena gli effetti delle non linearità diventano meno importanti, il segnale gravitazionale emesso può essere sempre più approssimato da una combinazione lineare di funzioni sinusoidali, decrescenti esponenzialmente nel tempo. Nella fase della collisione vengono emesse onde

gravitazionali nell'intervallo $2kHz/m \leq \nu \leq 16kHz/m$ con m massa di ogni BH [13]:

$$H(\nu) \approx 4.8 \times 10^{-21} Hz^{-1} \left(\frac{m}{2.2M_{\odot}} \right) \left(\frac{920Hz}{\nu} \right) \left(\frac{10kpc}{d} \right) \quad (2.7)$$

durante la fase in cui la dinamica è retta dalle oscillazioni smorzate del buco nero, lo spettro è [13]:

$$H(\nu) = 7.8 \times 10^{-20} \left(\frac{m}{17.4M_{\odot}} \right) \left(\frac{10kpc}{d} \right) Hz^{-1} \cdot \left[\frac{648}{\left(\left(\left(\frac{\nu}{920Hz} \right) \left(\frac{m}{17.4M_{\odot}} \right) - 1 \right)^2 + 36 \right)^2} + \frac{800}{\left(\left(\left(\frac{\nu}{920Hz} \right) \left(\frac{m}{17.4M_{\odot}} \right) + 1 \right)^2 + 36 \right)^2} \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

dove il termine dentro parentesi quadre diventa unitario per $\nu = 920Hz$ e $m = 17.4M_{\odot}$. Il segnale complessivo nelle tre fasi è rappresentato nella fig.2.3 per alcuni valori delle masse m delle binarie coalescenti; nella fig.2.4 presentiamo invece l' $H_0(1kHz)$ al variare della massa m in unità di masse solari M_{\odot} .

Il rate atteso è di alcuni eventi all'anno alla distanza di $200Mpc$

Figura 2.3: $H_0(\nu)$ di una binaria coalescente con massa di $17.4M_\odot$ posta alla distanza di $d = 10kpc$.

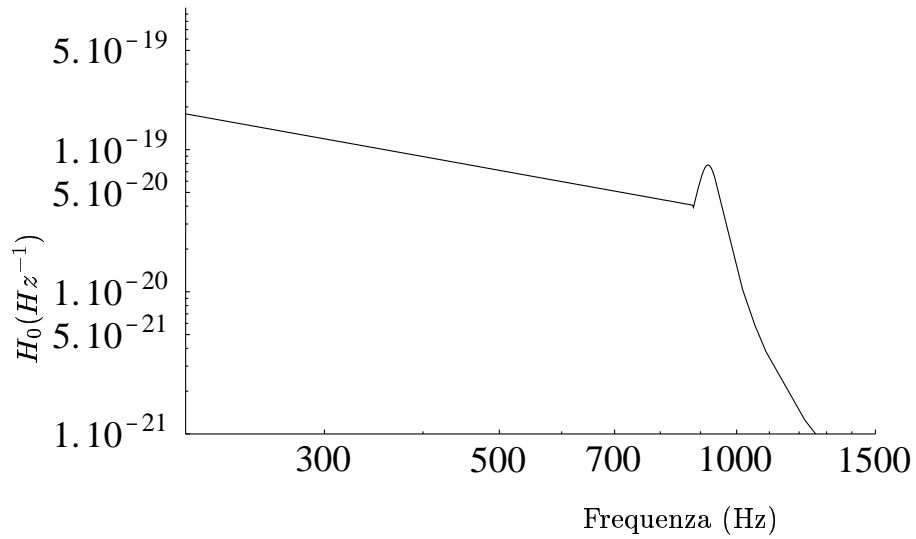
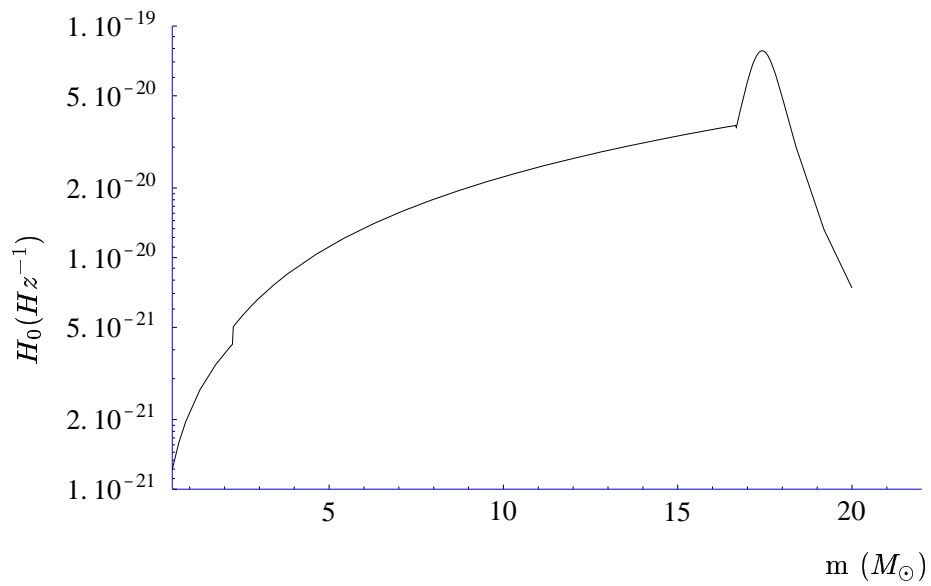


Figura 2.4: H_0 a 920 Hz al variare della massa, m , di una binaria supposta alla distanza di $10kpc$; si possono facilmente individuare le tre fasi di emissioni di o.g. del processo di coalescenza: quelle generate dallo spiraleggiamento (sinistra), dalla collisione (centro) e dalle oscillazioni smorzate.



2.2 Supernovae:

Si ritiene che possibili sorgenti osservabili di onde gravitazionali possano essere le supernovae stelle che aumentano improvvisamente di luminosità in un periodo di una o due settimane e che poi nell'arco dell'anno seguente diminuiscono di intensità fino a scomparire [14]. Dei vari tempi di supernovae esistenti quelle che emettono in onde gravitazionali sono quelle del tipo II che hanno uno spettro caratterizzate da intense linee dell'idrogeno e sono il risultato del collasso del nucleo di una stella massiccia ($M \geq 9M_{\odot}$) a stella di neutroni o buco nero.

Se a causa della rotazione o della convezione del nucleo della stella [15] il collasso e/o la prima fase di esplosione presenta delle deviazioni dalla simmetria sferica, le supernovae II tipo emetterebbero una quantità significativa di radiazione gravitazionale. Alla distanza del "Virgo Cluster" di 15 Mpc ci aspettiamo un rate di supernovae del secondo tipo di circa 7 all'anno.

2.2.1 Collasso del nucleo:

I modelli teorici e numerici del collasso nucleare di supernovae sono basati sull'idea che l'implosione del nucleo di ferro di una stella massiccia ($M \geq 9M_{\odot}$) causa l'esplosione degli strati esterni della stella con la conseguente violenta espulsione di massa e la formazione di una stella di neutroni o di un buco nero.

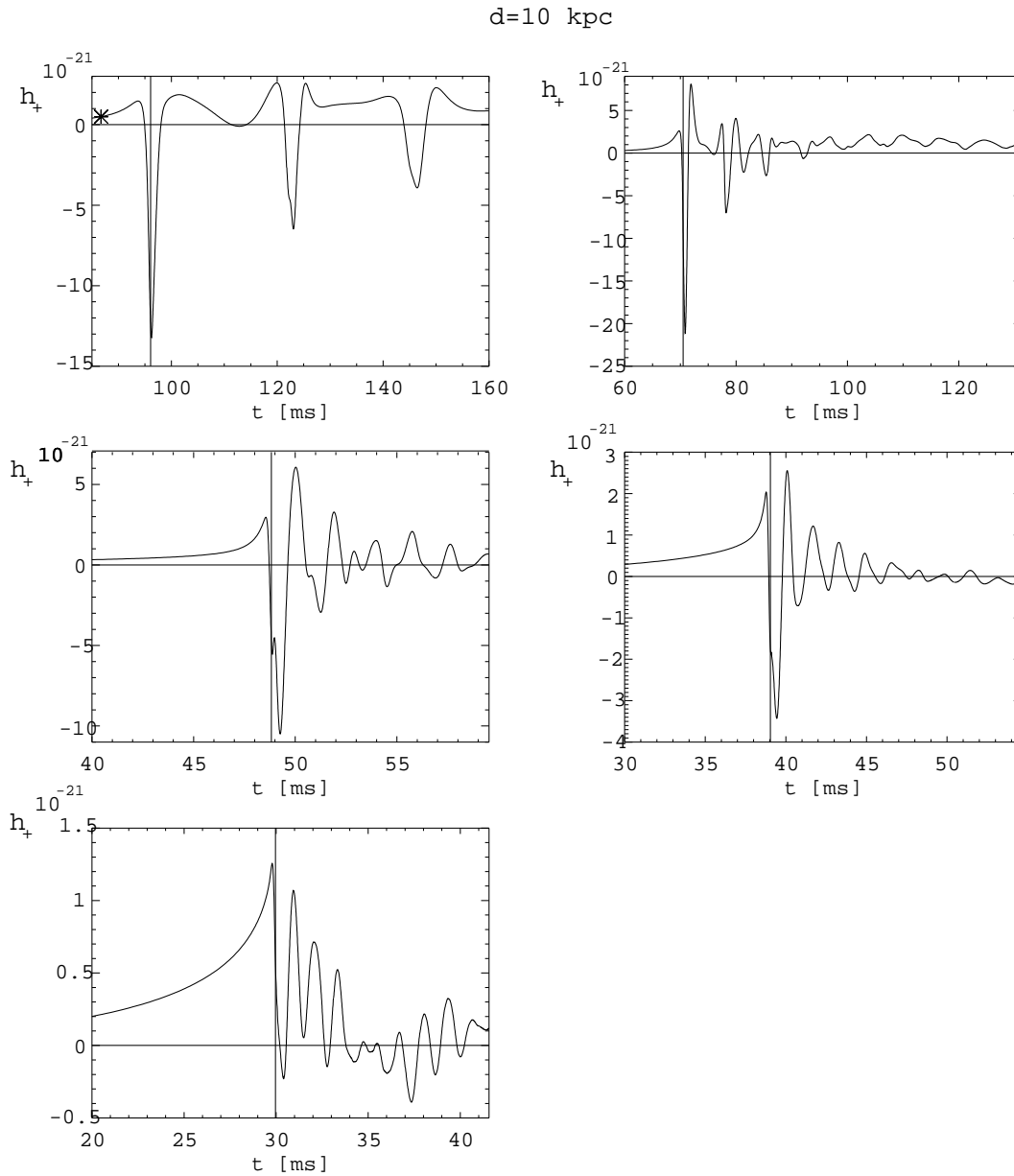
Secondo quanto riportato in letteratura [16] una stella, contrapponendo alla gravità la pressione degli elettroni relativistici, può essere stabile solo se la sua massa è inferiore alla massa critica di

$$M_{Ch} = 1.457(2Y_e)^2 M_{\odot} \quad (2.9)$$

dove M_{Ch} è la massa di Chandrasekhar e Y_e è il numero di elettroni per barione. Altrimenti la stella è destinata a collassare ed a divenire una stella di neutroni od un buco nero. Tale collasso si sviluppa quasi adiabaticamente e, se il nucleo non ruota, si ferma solo quando la densità centrale raggiunge densità nucleari se è ruotante invece, l'effetto stabilizzante delle forze centrifughe arrestano il collasso a densità inferiori a quelle nucleari.

Attraverso simulazioni Zwerger e Müller [17] hanno elaborato nel 1996 un catalogo di supernovae con 78 differenti modelli di collassi nucleari. Il loro studio della dinamica si basa su codici d'idrodinamica Newtoniana e su una descrizione semplificata della fisica del collasso: trascurando, infatti, ogni effetto di trasporto radiativo in [17] simulano il collasso di un nucleo di ferro, politropo e ruotante; il nucleo non ruotante corrispondente ha una massa di $M_0 = 1.457M_{\odot}$. La maggior parte (90%) dell'energia gravitazionale viene emessa durante la prima oscillazione dopo il colosso che ha la durata di circa $1ms$ (fig.2.5). Lo spettro delle o.g. si estende da 50 Hz ai 3 kHz ma la maggior parte dell'energia viene emessa tra i 500 Hz e 1 kHz. Complessivamente viene emessa in onde gravitazionale una quantità di energia in masse solari compresa tra $6 \times 10^{-11}M_{\odot}c^2$ e $8 \times 10^{-8}M_{\odot}c^2$.

Figura 2.5: Ampiezza di quadrupolo prodotta dal collasso di politropi ruotanti di ferro supposti ad una distanza di $10kpc$ [17]. In ciascun pannello la linea verticale indica il momento in cui avviene il rimbalzo di durata di circa $1ms$.



2.3 Stelle di neutroni ruotanti:

Poichè le stelle di neutroni hanno un raggio molto vicino a quello Schwarzschild: $r \sim 1.5 - 3R_s$ e, nel caso ruotino, la loro velocità può raggiungere all'equatore $v \sim c/2$ le NS sono a priori delle probabili sorgenti di forti emissioni d'onde gravitazionali periodiche. Poichè un corpo uniformemente ruotante e perfettamente simmetrico rispetto al suo asse di rotazione non emette alcuna radiazione gravitazionale, per emettere o.g. una stella di neutroni deve avere dunque una forma che si allontana il più possibile dalla simmetria assiale. Questa asimmetria può presentarsi in differenti situazioni:

- Può essere dovuto ad un disallineamento dell'asse principale d'inerzia della NS con il suo asse di rotazione, causando la precessione della stella [12]. Tuttavia tale disallineamento decresce esponenzialmente per l'emissione di o.g. [18] con un tempo di decadimento di circa un giorno e la NS non è rilevabile; se però la NS fa parte di un sistema binario e la compagna ne accelera la rotazione per accrescimento, in questo caso il disallineamento si mantiene per un tempo sufficiente; in tal caso per poter rivelare il segnale gravitazionale bisogna integrare per lungo tempo il segnale misurato dal rivelatore.
- Deformazioni causate dagli stellamoti: in questo secondo caso il segnale emesso è più interessante in quanto può essere visto come un segnale impulsivo. Le stelle di neutroni rallentano il loro moto rotatorio per l'emissione di o.g. e per l'effetto della torsione elettromagnetica associata al loro campo magnetico; in tal modo le forze centrifughe agenti sulla stella diminuiscono e quindi anche la sua ellitticità poloidale diminuisce con la conseguente frattura ("starquakes") e risolidificazione della struttura cristallina della crosta della NS. In questi stellamoti vengono sviluppate oscillazioni radiali [19] della NS che emettono o.g. del tipo:

$$h(t) \approx 10^{-23} e^{i\omega_n t - \frac{t}{\tau_n}} \quad (2.10)$$

con ω_n la frequenza angolare del modo n-esimo compresa tra $1kHz$ e $2kHz$; τ_n il corrispondente tempo di smorzamento si fissa nell'intervallo $0.14s \leq \tau_n \leq 4.7s$ [19]. Questi starquake emettono gamma e quindi una eventuale rivelazione gravitazionale potrebbe trovare una controparte nella rivelazione delle onde elettromagnetiche emesse dalla NS durante gli starquakes.

2.3.1 Instabilità di CFS e r modi:

Le stelle ruotanti sono anche soggette ad una classe di instabilità dette di Chandrasekhar-Friedman-Schutz (CFS), che sono causate dall'azione della radiazione gravitazionale emessa dalla stella. Ci sono due condizioni necessarie affinché una stella di neutroni sia CFS-instabile:

- Il modo di oscillazione deve essere retrogrado rispetto alla stella ma progrado rispetto ad un osservatore posto all'infinito;

- Se si misura l'energia del modo nel sistema di riferimento corrotante con la stella la potenza dissipata dalla viscosità deve essere inferiore alla potenza assorbita dal modo per l'azione della radiazione gravitazionale.

Attraverso analisi Newtoniane e post Newtoniane Lindblom stabilisce [20] che queste condizioni sono soddisfatte solo per il modo di oscillazione fondamentale della NS e solo in una regione ben determinata di temperature e frequenze angolari di rotazione della NS; proprio a causa di queste condizioni fino a quasi due anni fa si pensava che l'instabilità di CFS non avesse in pratica alcuna importanza rilevante. Questa visione viene radicalmente modificata non appena Andersson [21] scopre che in assenza di viscosità un nuovo modo di oscillazione estende la zona di instabilità a valori di velocità angolari molto meno restrittivi, questi modi sono detti r (otazione)-modi. Gli r -modi sono particolari per molti aspetti. Sono per prima cosa delle perturbazioni del campo di velocità nella stella, con sole piccole variazioni della densità della stella. In una stella ruotante è la forza di Coriolis che agisce negli r -modi come debole forza ristabilizzante e che ne gestisce la dinamica. Inoltre la radiazione gravitazionale emessa dal r -modo è originata primariamente dalle correnti di massa, è un effetto cioè del campo gravitomagnetico della stella di neutroni. L'accoppiamento della radiazione gravitazionale con i quadrupoli di corrente è poi per gli r -modi così forte che le forze viscosive presenti nella giovane stella di neutroni non sono in grado di reprimere l'instabilità indotta dall'emissione di o.g. Quando la dinamica è gestita interamente dall'emissione di o.g. $H(\nu)$ è approssimabile come:

$$H(\nu) = 1.4 \times 10^{-21} \left(\frac{1kHz}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{10kpc}{d} \right) Hz^{-1} \quad (2.11)$$

Tuttavia questi r -*modi* emettono delle o.g. quasi periodiche con frequenze che restano costanti per lungo tempo (10^3s al $1kHz$) e che quindi non possono essere considerate come dei segnali gravitazionali impulsivi, come invece avviene per le o.g. provenienti da binarie coalescenti in cui le frequenze cambiano molto velocemente verso la fase finale della coalescenza (e quindi a ν kHz).

2.4 L'impulso standard

Abbiamo dunque visto come molti dei segnali gravitazionali attesi possano essere visti alle frequenze dei modi principali di un rivelatore risonante come dei segnali impulsivi di frequenza $\sim 1kHz$, di durata di $1ms$ e ampiezza h_0 ; infatti non solo possiamo considerare come impulsi vi tutti quei segnali che sono tali, come le o.g. emesse dalle supernovae (par.2.2) o dai modi di oscillazione di un buco nero (par.2.1.2), ma anche e soprattutto quelle emesse durante la fase finale della coalescenza di una binaria (par.2.1). Infatti nonostante queste onde gravitazionali sono considerate come periodiche, la loro frequenza cambia così velocemente nel tempo che sono attorno al kHz solo per circa $1ms$ e quindi vengono visti da un rivelatore risonante come dei singoli impulsi.

Vediamo come sia possibile modellizzare questi impulsi con lo scopo di trovare una relazione tra l' H_0 e l'energia totale emessa isotropicamente da una sorgente supposta ad una distanza d . In tal modo potremo nei capitoli seguenti dare un preciso significato ai limiti superiori che daremo sulle ampiezze spettrali H_0 . Consideriamo dunque due diversi impulsi standard:

- 1. Un segnale monocromatico, di $\nu_0 = 1kHz$ e di durata finita $\tau_s = 1s$ e che $h_X = h_+$, dato dalla (fig.2.6) (impulso zero picco):

$$h(t) = \begin{cases} h_0 \sin(2\pi\nu_0 t) & |t| \leq \tau_s \\ 0 & |t| > \tau_s \end{cases} \quad (2.12)$$

che quindi ha trasformata di Fourier (fig.2.7):

$$H(\nu) = h_0 \frac{\tau_s}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(2\pi(\nu_0 - \nu)\tau_s)}{2\pi(\nu_0 - \nu)\tau_s} - \frac{\sin(2\pi(\nu_0 + \nu)\tau_s)}{2\pi(\nu_0 + \nu)\tau_s} \right) \quad (2.13)$$

che per $\nu \rightarrow \nu_0 = 1kHz$ da $h_0 = 2000Hz \times H_0$.

Figura 2.6: Impulso standard del primo tipo di $\nu = 1kHz$ e $\tau = 1ms$ in unità di H_0 .

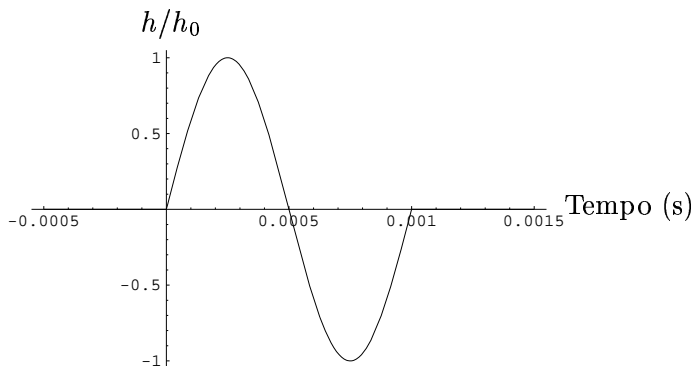
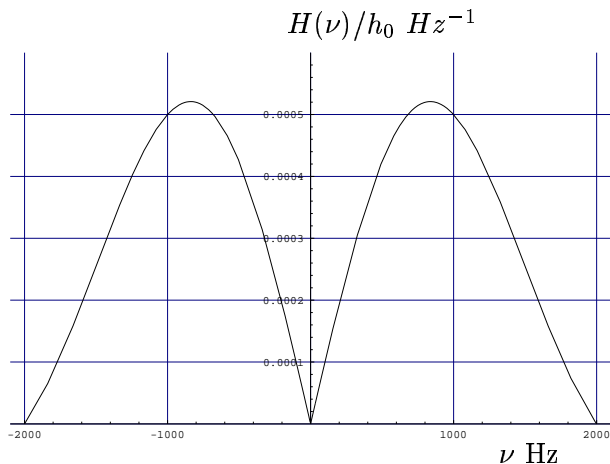


Figura 2.7: Trasformata di Fourier sempre in unità di h_0 del segnale della fig.2.6



- 2. Posso usare il segnale monocromatico che decade esponenzialmente secondo la (fig.2.8):

$$h(t) = h_0 \cos(2\pi\nu_0 t) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi t}{\tau_0}\right)^2} \quad (2.14)$$

la cui trasformata di Fourier è mostrata in fig.2.9. Questa volta si ha per $\nu \rightarrow \nu_0 =$

Figura 2.8: Impulso standard del secondo tipo di $\nu = 1kHz$ e $\tau = 1ms$ in unità di H_0 .

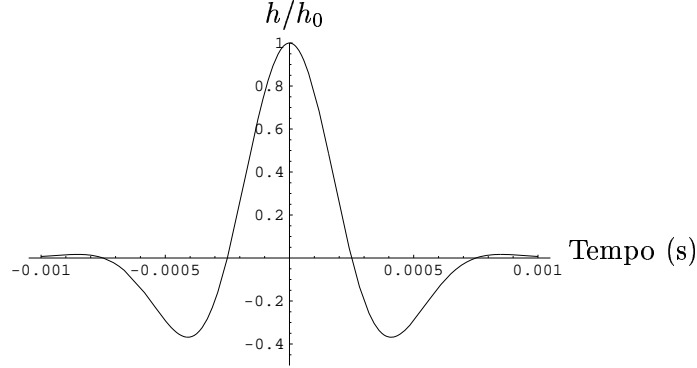
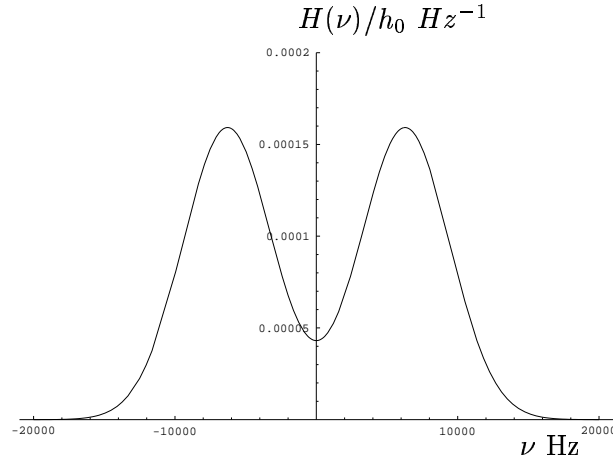


Figura 2.9: Trasformata di Fourier sempre in unità di h_0 del segnale della fig.2.8



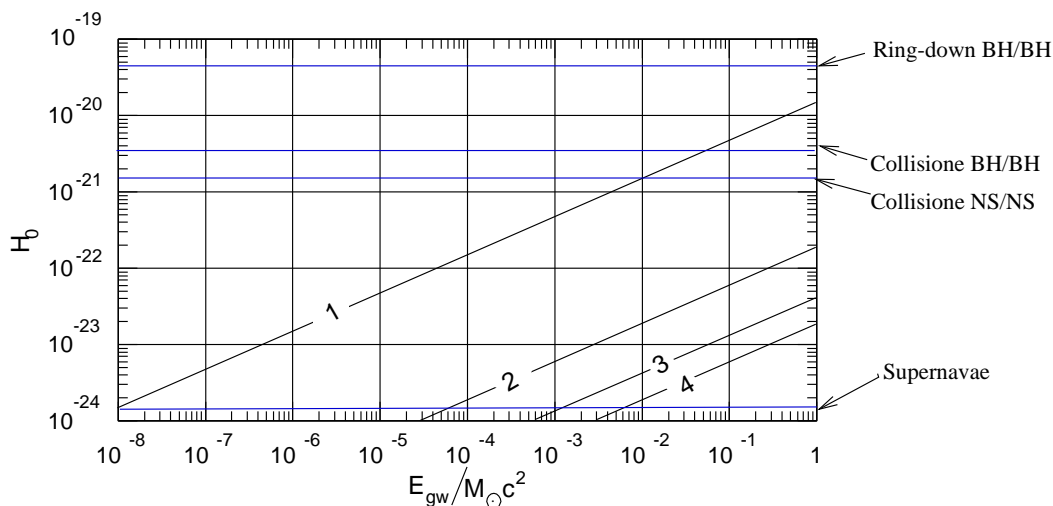
$1kHz$ che $h_0 \approx 2500Hz \times H_0$.

Come si vede i vari impulsi standard storicamente utilizzati nel campo della ricerca delle onde gravitazionali non differiscono molto fra di loro e comunque per conoscere approssimativamente il valore h_0 nel tempo si può moltiplicare $H_0(Hz^{-1})$ per circa $2000Hz$ [22]. D'ora in avanti noi considereremo come impulso standard il primo segnale (2.12).

Vogliamo sapere quale energia totale emessa $E_{o.g.}$, dalla sorgente che si trova ad una distanza d dal punto in cui si misura $h(t)$ e che emette isotropicamente; se si integra il flusso di potenza eq. 1.12 nel tempo e su di una sfera di raggio d ; risolvendo dunque per H_0 si ottiene [22]:

$$H_0 \approx \sqrt{\frac{GE_{o.g.}\tau_s}{2\pi^2 c^3 d^2 \nu_0^2}} \approx \frac{1.5 \times 10^{-21}}{Hz} \frac{1kHz}{\nu_0} \frac{10kpc}{d} \sqrt{\frac{E_{o.g.}}{10^{-2}M_\odot c^2} \frac{\tau_s}{10^{-3}s}} \quad (2.15)$$

Figura 2.10: Relazione tra $E_{o.g.}$ e H_0 in funzione della distanza della sorgente d'onde gravitazionali [22]: la linea n. 1 si riferisce alla distanza del Centro Galattico ($d=10\text{kpc}$), la massa osservabile, cioè quella entro d , è di $M_{obs} = 0.4 \times 10^{12} M_{\odot}$; la linea n.2 si riferisce alla Galassia di Andromeda ($d \leq 0.77\text{Mpc}$, $M_{obs} 1.1 \times 10^{12} M_{\odot}$); la linea n.3 si riferisce ad altre due galassie del Gruppo Locale ($d \leq M_{obs} 2.2 \times 10^{12} M_{\odot}$); la linea n.4 è relativa al Virgo Cluster alla distanza di $d \leq 8\text{Mpc}$ che porta la massa osservata totale a $M_{obs} = 20 \times 10^{12} M_{obs}$



dove $E_{o.g.}$ è l'energia emessa dalla sorgente in onde gravitazionali. Nella fig.2.10 mostriamo dunque a quale energia emessa in onde gravitazionali isotropicamente ad una distanza d dalla Terra corrisponda un valore in H_0 alla Terra. Naturalmente la relazione 2.15 vale soltanto per forme d'impulso di o.g simili a quello standard. Il calcolo di $E_{o.g.}$ da H_0 richiede dunque in generale la conoscenza della forma dell'impulso.

Capitolo 3

IGEC

Negli ultimi anni sono stati resi operativi numerosi rivelatori risonanti di onde gravitazionale che hanno quindi per la prima volta potuto operare simultaneamente. Il 4 Luglio del 1997 all'Amaldi Conference i gruppi di ricerca che sviluppano e mantengono questi rivelatori hanno concordato un protocollo di scambio dati chiamato "International Gravitational Events Collaboration" (IGEC) per coordinare e correlare i dati di questi rivelatori [7]. I rivelatori che attualmente partecipano ad IGEC sono: ALLEGRO (LSU, Baton Rouge, Louisiana, USA), AURIGA (INFN, Legnaro, Italia), EXPLORER (CERN), NAUTILUS (INFN, Frascati, Italia) e NIOBE (NSF, Perth, Australia). L'accordo ha posto le basi per un'analisi dati congiunta, stabilendo gli obiettivi, le modalità di scambio e la politica di pubblicazione dei risultati. Ad ogni gruppo di ricerca è stata lasciata la responsabilità del proprio sistema di acquisizione dati, di calibrazione, di filtraggio, di ricerca eventi e di timing.

In questo e nei due seguenti capitoli presenterò dunque il mio diretto contributo all'analisi dei dati scambiati sotto il protocollo IGEC.

3.1 Introduzione

3.1.1 Protocollo scambio dati

IGEC è nato con lo scopo di ricercare possibili segnali impulsivi gravitazionali (par.2.4) della durata di $1ms$ circa e con spettro piatto attorno al kHz . IGEC è predisposto dunque alla rivelazione di onde gravitazionali prodotte da collisioni fra buchi neri (BH) e/o stelle di neutroni (NS), ma anche di quelle emesse da binarie coalescenti di BH e/o NS (cap.2.1).

Con questo intento il protocollo IGEC prevede i seguenti punti:

- Per ogni antenna il singolo gruppo di ricerca seleziona i candidati per la rivelazione di o.g. impulsive, “eventi”; la selezione avviene ricercando nell’uscita dei dati, filtrati per un’eccitazione impulsiva (cap.1), quegli eventi che superano una soglia fissata in modo da scambiare in media circa 100 eventi al giorno; la soglia è fissata relativa al rumore del rivelatore: AURIGA, EXPLORER e NAUTILUS hanno scambiato solo gli eventi con $SNR > 5$; ALLEGRO invece fissa la soglia in $SNR = 2.8$; NIOBE fa invece una selezione in energia. Ogni gruppo è responsabile di scegliere la tecnica che ritiene più opportuna per produrre la lista di “eventi”.
- L’informazione di ogni evento consiste nel:
 - +tempo in UT (Tempo Universale) del massimo dell’evento
 - +ampiezza (bilatera), data in unità $H_0(Hz^{-1})$, della trasformata di Fourier dell’impulso gravitazionale, avente spettro costante sulle frequenze dei modi di risonanza del rivelatore (cap.1).
 - +SNR dell’evento considerando il rumore medio del rivelatore attorno al tempo dell’evento stesso.
 - +Campi aggiuntivi ausiliari: χ^2 , durata evento, ecc.
- Dichiarazione dei periodi di buon funzionamento del rivelatore detti Start-Stop.

Nella fig.3.1 vediamo dunque un esempio di come vengano scambiati i dati tra i rivelatori all’interno della collaborazione.

3.1.2 Caratteristiche osservatorio

Come si vede dalla fig.3.2, un cerchio massimo del globo terrestre passa in prossimità di quattro dei cinque rivelatori dell’accordo IGEC. Ponendo gli assi longitudinali dei rivelatori perpendicolari a tale linea immaginaria sul piano orizzontale, si possono avere i rivelatori paralleli l’uno all’altro.

I rivelatori sono stati dunque allineati e nella tabella 3.1 si vede infatti come gli assi longitudinali dei rivelatori si discostino di soli pochi gradi rispetto alla direzione individuata dall’asse del cerchio massimo. Solo NIOBE non è situato lungo il cerchio massimo, avendo dunque il

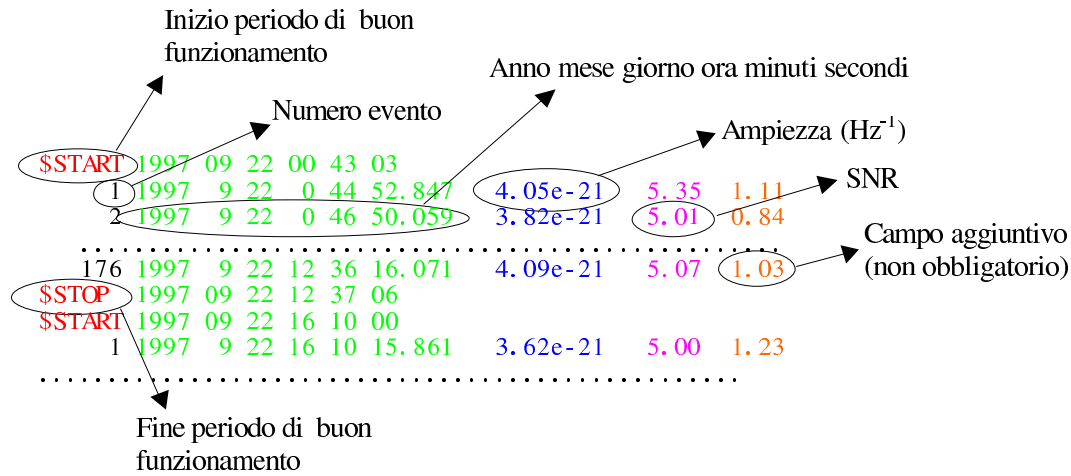


Figura 3.1: Esempio di dati scambiati

suo asse longitudinale più disallineato rispetto a quello degli altri rivelatori.

Consideriamo ora la funzione di risposta di un rivelatore a barra risonante che nel caso di orientazione ottima dall'eq.1.17 é:

$$ap(\theta, \phi) = \sin^2 \theta \cos(2\phi) \quad (3.1)$$

dove θ è l'angolo tra la direzione di propagazione dell'onda e l'asse longitudinale dell'oscillatore e ϕ è l'angolo sul piano di polarizzazione dell'onda tra l'asse longitudinale dell'oscillatore e l'asse x_3 del sistema di coordinate dell'onda (fig.1.1). Rappresentiamo la funzione di risposta nello spazio tridimensionale nella fig.3.3. Vediamo come nell'arco delle 24 ore vari la funzione di risposta di ogni rivelatore nella direzione del Centro Galattico (fig.3.4). Si vede che le varie curve ottenute si discostano l'una dall'altra di soli pochi centesimi, con la sola eccezione di NIOBE il cui fattore di risposta si discosta di 0.2 da quelle degli altri rivelatori (fig.3.4). Con i rivelatori allineati si massimizza la probabilità di rivelazione in coincidenza, in quanto tutti i rivelatori funzionanti vedono la stessa porzione di cielo con la massima sensibilità; tra l'altro poichè i rivelatori distano tra loro anche più di 10.000 km (tabella 3.2) e poichè l'onda gravitazionale si propaga alla velocità della luce, sarà possibile stimare la direzione di provenienza dell'onda quando verranno scambiati eventi con un incertezza temporale inferiore al centesimo di secondo (tabella 3.2).

Figura 3.2: Posizione dei rivelatori risonanti nel mondo e cerchio massimo passante per ALLEGRO, AURIGA, EXPLORER e NAUTILUS; per rappresentare la superficie terrestre è stata utilizzata la proiezione di Mollweide, che mappa aree uguali in aree uguali del mondo indipendentemente dalla latitudine e dalla longitudine; talvolta tale proiezione è detta ellittica o omolografica.

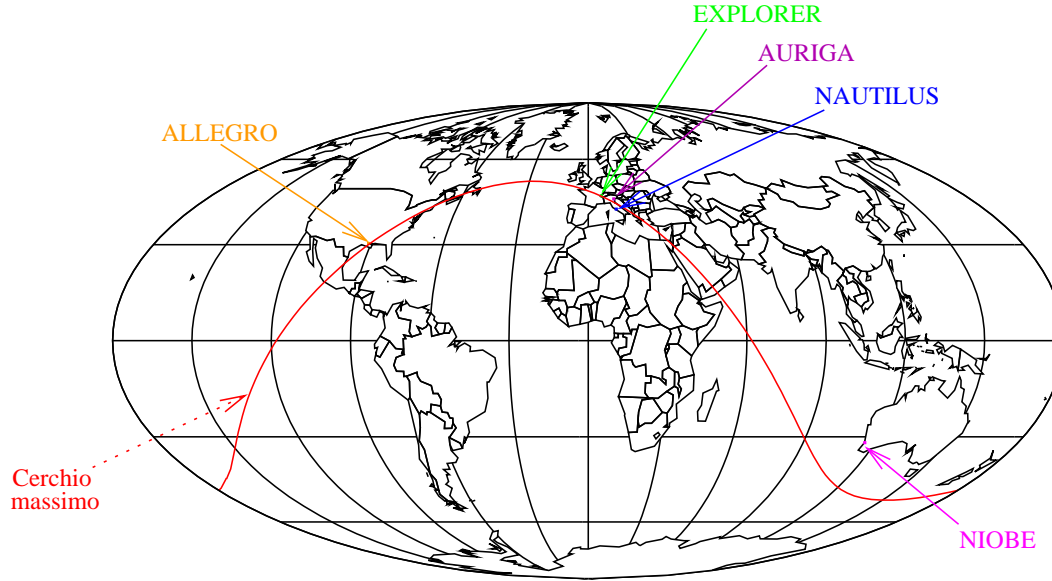


Tabella 3.1: Caratteristiche principali dei cinque rivelatori risonanti nel 1997-98. Il disallineamento è l'angolo tra l'asse della barra e l'asse del cerchio massimo 3.2

ANTENNA	ALLEGRO (AL)	AURIGA (AU)	EXPLORER (EX)	NAUTILUS (NA)	NIOBE (NI)
Materiale	AL5056	AL5056	AL5056	AL5056	Nb
Massa [kg]	2296	2230	2270	2260	1500
Lunghezza [m]	3.0	2.9	3.0	3.0	2.75
Modo - [Hz]	895	912	905	908	694
Modo + [Hz]	920	930	921	924	713
Q_{\pm} [10^6]	2	3	1.5	0.5	20
Temp. [K]	4.2	0.2	2.6	0.1	5.0
Latitudine	30°24'45.1" N	45°21'12" N	46°27' N	41°49'26" N	31°56' S
Longitudine	91°10'43.8" W	11°56'54" E	6°12' E	12°40'21" E	115°49' E
Azimuth	40° W	44° E	39° E	44° E	0°
Disallineamento [deg]	9	4	2	3	29

Figura 3.3: Antenna pattern di un rivelatore a barra risonante ottenuta dall'eq.3.1 la linea continua è l'asse longitudinale del rivelatore, quella tratteggiata rappresenta la direzione di provenienza dell'onda gravitazionale; la distanza dall'origine del punto di intersezione della retta tratteggiata con la superficie è il valore della funzione di risposta lungo la direzione individuata da tale retta.

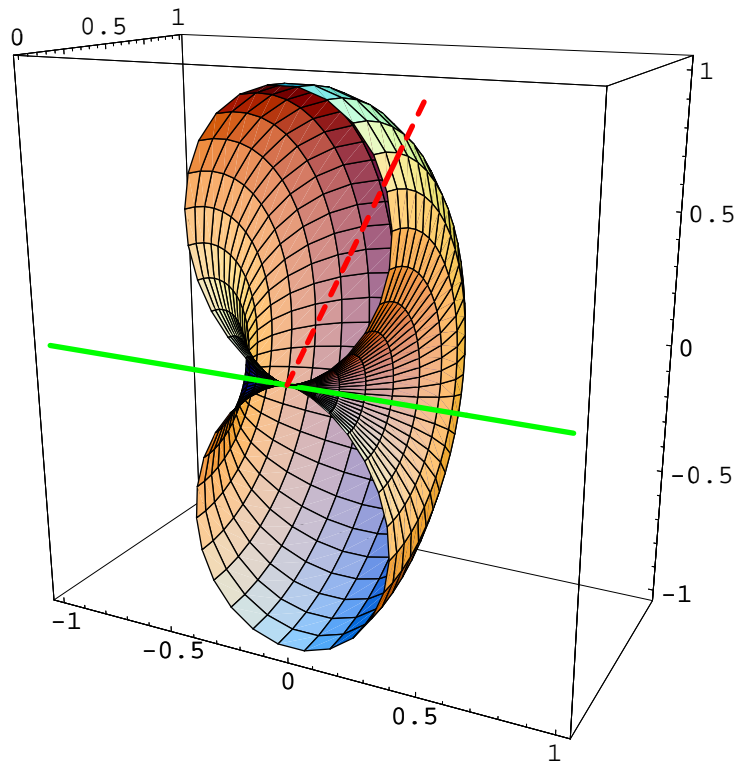


Tabella 3.2: Distanze tra le varie coppie di rivelatori di IGEC, calcolate dalla tabella 3.1 e assumendo il raggio della Terra costante e uguale a $R_{Earth} = 6317km$.

Coppia	Distanza (km)	Ritardo luce (ms)
AL-NI	12540	41.8
EX-NI	11694	39.0
NA-NI	11691	39.0
AU-NI	11602	38.7
AL-AU	6162	20.5
AL-EX	6012	20.0
AL-NA	5913	19.7
EX-NA	711	2.4
AU-EX	471	1.6
AU-NA	393	1.3

Figura 3.4: Funzione di risposta in ampiezza per i cinque rivelatori di IGEC rispetto al Tempo Universale rispetto al Centro Galattico (eq:3.1). θ è l'angolo tra l'asse della barra e la direzione della sorgente. Le tre linee che al tempo 0 hanno $\sin^2 \theta \sim 0.5$ rappresentano i rivelatori AURIGA, EXPLORER e NAUTILUS; quelle a $\sin^2 \theta \sim 0.35$ e ~ 0.6 rappresentano rispettivamente NIOBE e ALLEGRO.

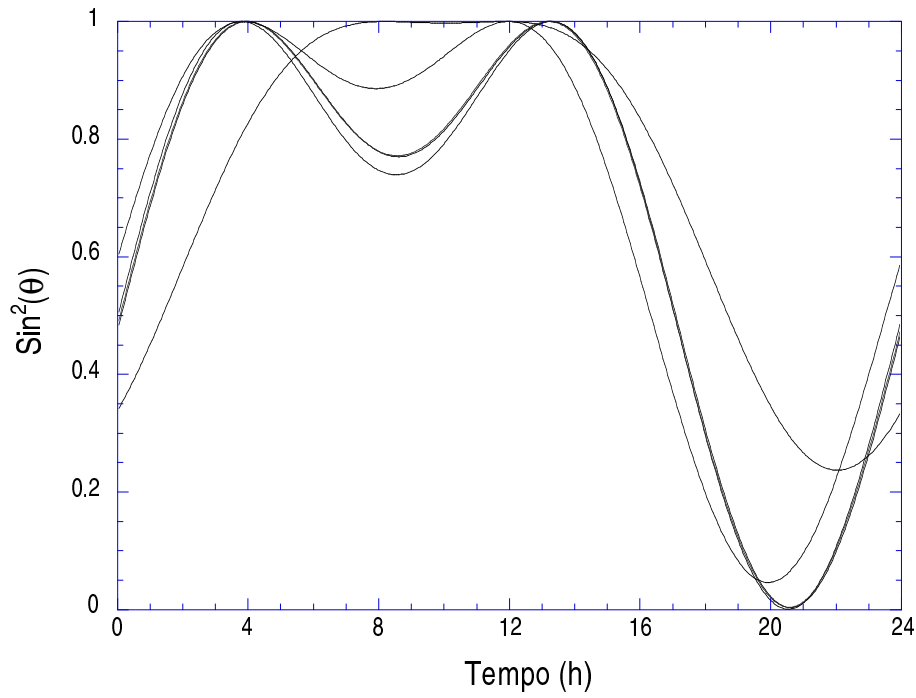
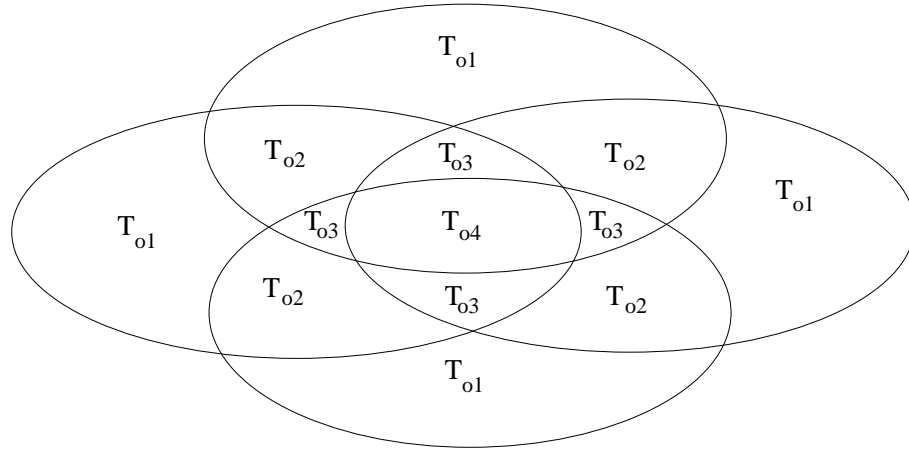


Figura 3.5: Le quattro eclissi rappresentano gli insiemi dei periodi di osservazione di ogni rivelatore; studioandone le intersezioni si possono ricavare le eq.3.2



3.2 Periodi di osservazione

Attualmente sono stati scambiati secondo il protocollo IGEC i dati relativi dal Giugno 1997 fino a fine 1998; nella tabelle 3.3, 3.4 3.5 e 3.6 presentiamo rispettivamente i periodi di osservazione dei rivelatori singoli, delle coppie, delle triple e delle quadruple. Non ci sono periodi comuni di funzionamento a cinque, in quanto nel 1997 non era operativo NAUTILUS e viceversa NIOBE nel 1998. Ci siamo dunque calcolati i periodi di tempo in cui funzionavano solo un rivelatore T_{o1} , oppure solo due T_{o2} , tre T_{o3} o quattro T_{o4} usando il 1997 e 1998 separatamente le:

$$\begin{aligned}
 T_{o4} &= T4 & (3.2) \\
 T_{o3} &= \sum_{i=1}^4 T3_i - 4T_{o4} \\
 T_{o2} &= \sum_{i=1}^6 T2_i - 3T_{o3} - 6T_{o4} \\
 T_{o1} &= \sum_{i=1}^6 T1_i - 2T_{o2} - 3T_{o3} - 4T_{o4}
 \end{aligned}$$

dove $T1$, $T2$, $T3$ e $T4$ sono i tempi di osservazione dati per i singoli rivelatori, le coppie, le triple e le quadruple. Le equazioni 3.2 si ottengono facilmente studiando la fig.3.5. Dall'eq.3.2 possiamo anche calcolarci i periodi in cui abbiamo almeno un rivelatore acceso $T_{atl1} = T_{o1} + T_{o2} + T_{o3} + T_{o4}$, almeno due $T_{atl2} = T_{o2} + T_{o3} + T_{o4}$, tre $T_{atl3} = T_{o3} + T_{o4}$ e quattro $T_{atl4} = T_{o4}$. Applicandole al 1997-1998 otteniamo i dati in tabella 3.7 e la fig.3.6. Nella fig.3.7 mostriamo invece la frazione settimanale di tempo con almeno uno, due, tre e quattro rivelatori funzionanti simultaneamente da Giugno 1997 a Dicembre 1998.

Tabella 3.3: Tempo totale di osservazione T_1 , numero N_{evt} e rate degli eventi R_{evt} per ciascun rivelatore.

<i>Rivelatore</i>	<i>T1 (giorni)</i>	<i>N_{evt} (eventi)</i>	<i>R_{evt} (eventi/giorno)</i>
ALLEGRO	405.7	45805	112.9
AURIGA	153.0	26817	175.3
EXPLORER	137.5	20711	150.7
NAUTILUS	108.5	8764	80.8
NIOBE	185.9	2600	14.0

Tabella 3.4: T_2 è il tempo osservativo comune di ogni coppia di rivelatori, $N_{evt I}$ e $N_{evt II}$ sono il numero di eventi del primo e del secondo rivelatore rispettivamente durante T_2 .

<i>Coppia</i>	<i>T2 (giorni)</i>	<i>N_{evt I}</i>	<i>N_{evt II}</i>
AL-AU	103.8	11505	18182
AL-EX	100.7	11323	11887
AL-NA	98.9	11366	7906
AL-NI	27.1	3015	403
AU-EX	44.1	7254	5063
AU-NA	18.3	3571	922
AU-NI	37.0	6002	559
EX-NA	37.5	4126	2234
EX-NI	18.9	3585	217

Tabella 3.5: Come la tabella 3.4, ma per tre rivelatori funzionanti contemporaneamente.

<i>Tripla</i>	<i>T3 (giorni)</i>	<i>N_{evt I}</i>	<i>N_{evt II}</i>	<i>N_{evt III}</i>
AL-AU-EX	34.6	3823	5811	3250
AL-AU-NA	17.0	1872	3328	845
AL-AU-NI	17.7	1960	2624	276
AL-EX-NA	35.0	3893	3855	2086
AL-EX-NI	11.7	1320	1871	165
AU-EX-NA	8.6	1416	575	345
AU-EX-NI	11.5	2076	2205	128

Tabella 3.6: Come la tabella 3.4, ma per quattro rivelatori funzionanti simultaneamente

<i>Quadrupla</i>	T_4 (giorni)	$N_{evt I}$	$N_{evt II}$	$N_{evt III}$	$N_{evt III}$
AL-AU-EX-NI	7.6	862	1392	1172	105
AL-AU-EX-NA	7.9	858	1289	545	319

Tabella 3.7: Numero di giorni con solo T_o e almeno T_{att} N rivelatori funzionanti.

N	T_o (giorni)	T_{att} (giorni)
1	364.5	625.0
2	170.8	260.4
3	74.2	89.7
4	15.5	15.5
5	0	0

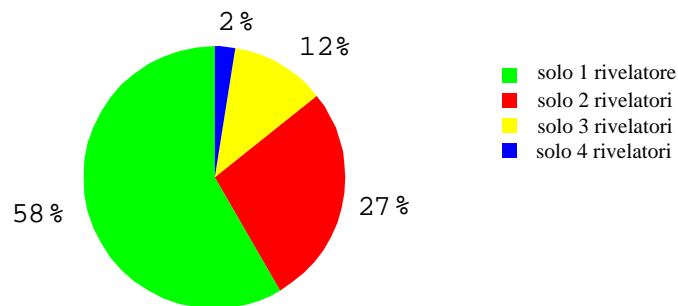
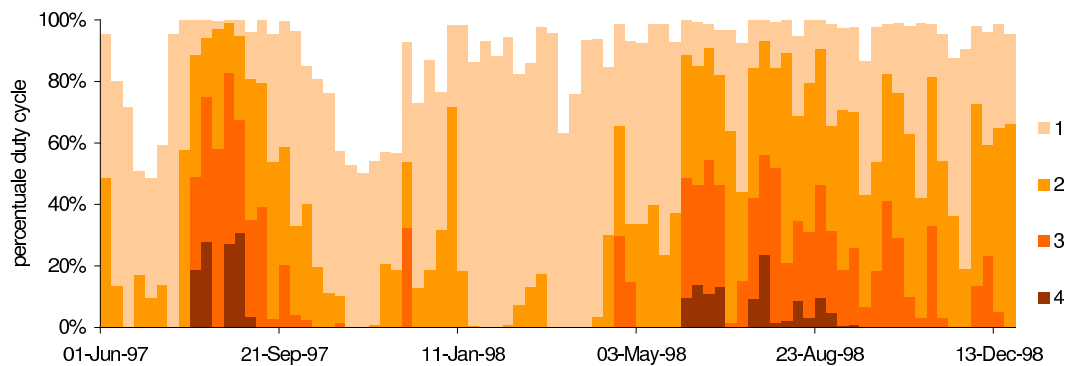
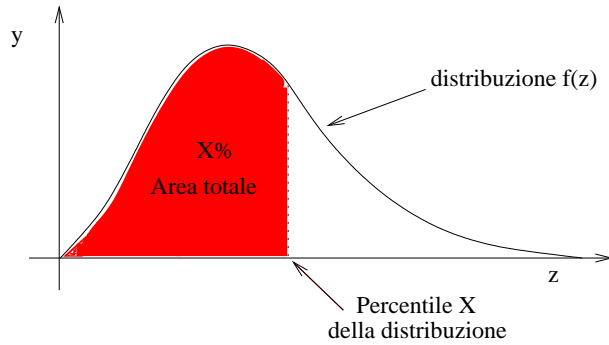
Figura 3.6: Percentuale del tempo totale di osservazione (625 giorni) in funzione del numero di rivelatori in funzione.**Figura 3.7:** Frazione di tempo settimanale con almeno uno, due, tre e quattro rivelatori funzionanti simultaneamente dal Giugno 1997 a Dicembre 1998.

Figura 3.8: Significato del percentile di una distribuzione $f(x)$ 

3.3 Distribuzione in sigma

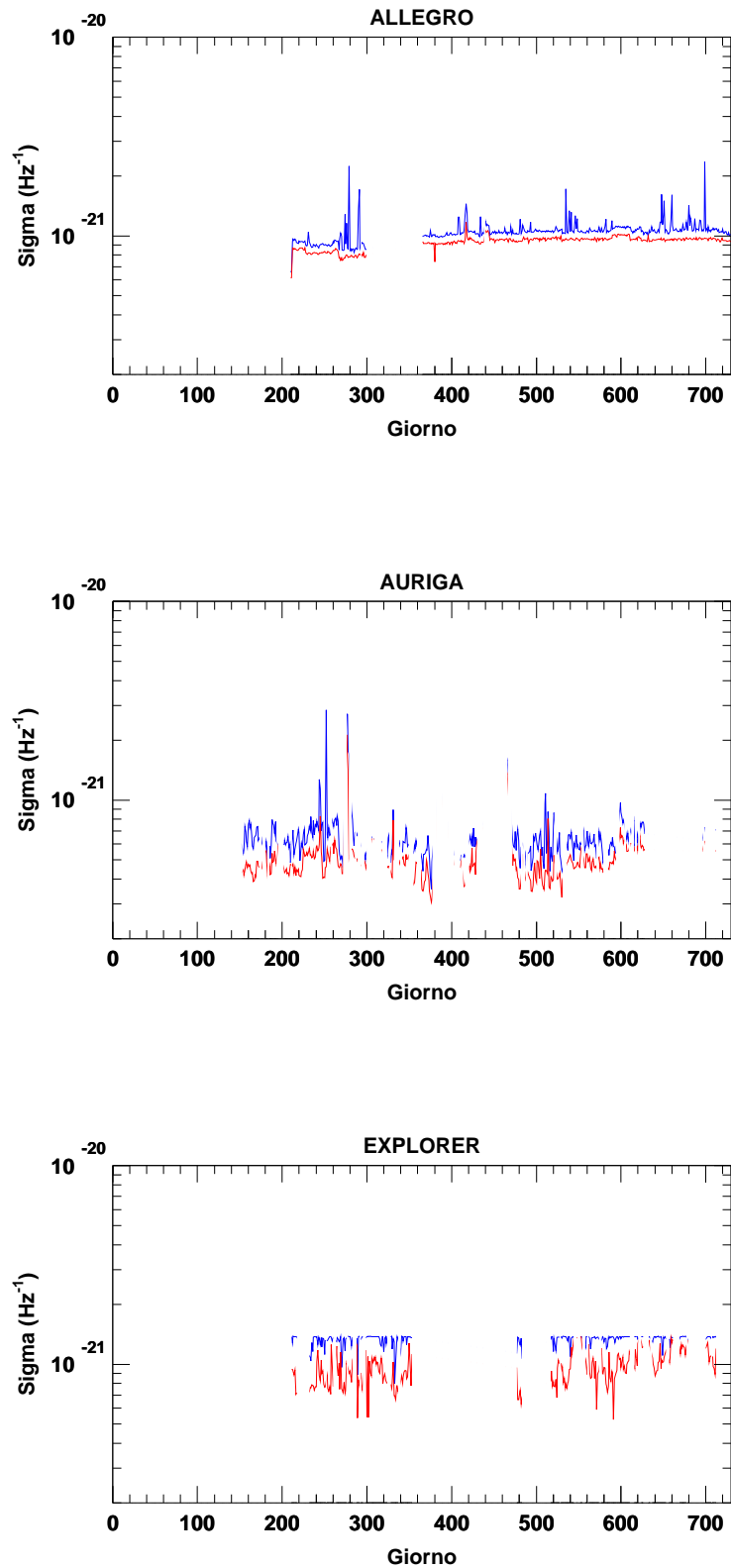
Vediamo come varia nel tempo il rumore $\sigma_H(Hz^{-1})$ dei rivelatori in termini delle componenti di Fourier H_0 di una o.g. equivalente: nella fig.3.9 per ogni rivelatore rappresentiamo dunque il valore massimo e minimo giornaliero della σ_H ; nella fig.3.10 diamo invece una rappresentazione riassuntiva della sensibilità dei rivelatori nel tempo, individuando i percentili 16-84%, 2.5-97.5% e 0-100% del tempo osservativo in funzione della sensibilità $\sigma_H(Hz^{-1})$ di ogni rivelatore. Ricordo che il percentile X (percX) di una distribuzione $f(z)$ è così definito (fig.3.8):

$$\int_{-\infty}^{percX} f(z)dz = X \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz \quad (3.3)$$

Nella fig.3.12 abbiamo infine rappresentato la percentuale di tempo osservativo di ogni rivelatore in funzione della migliore soglia in ampiezza.

Sono osservabili nella fig.3.9 il taglio in σ_H operato da EXPLORER e NAUTILUS a $1.5 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$ e $10^{-21} (Hz^{-1})$ rispettivamente e la ottima stazionarietà degli eventi di ALLEGRO (fig.3.10). Nella fig.3.12 si può osservare la presenza di alcuni periodi di tempo di AURIGA, circa il 2-3% del totale caratterizzati da una $\sigma_H > 10^{-21} (Hz^{-1})$, lontana dal valore medio $\approx 5.5 \times 10^{-22} (Hz^{-1})$. Nella fig.3.11 presentiamo l'equivalente della fig.3.10 sulla sensibilità ma riferita ora alle soglie di ricerca eventi dei vari rivelatori. Ad esempio si vede come le soglie di ricerca eventi siano state tipicamente molto simili nel 1997-98, differendo al massimo di un fattore ~ 2 da un anno all'altro; si nota anche come le prestazioni migliori sono quelle di ALLEGRO, che è stato il più stazionario di tutti, mentre NAUTILUS ed AURIGA hanno raggiunto le sensibilità migliori.

Figura 3.9: Per ogni rivelatore viene presentata la σ_H massima (linea blu) e minima (linea rossa) giornaliera per il 1997-98 (tempo in giorni a partire dal 1°)



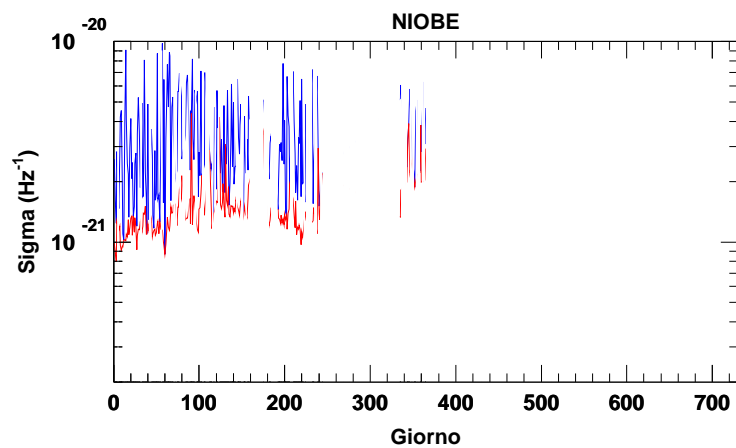
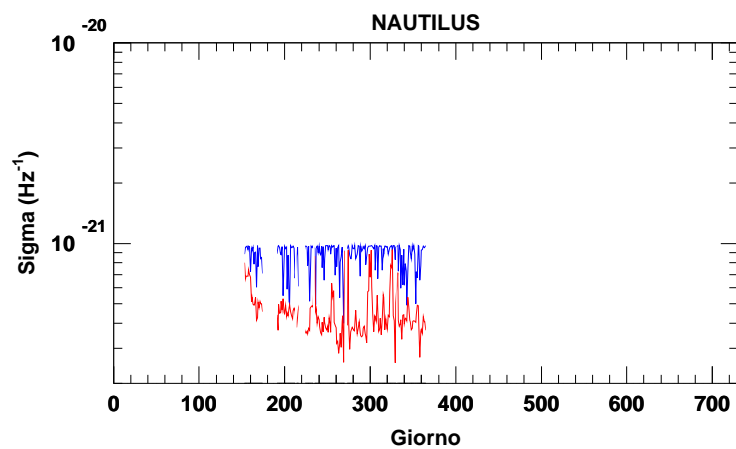


Figura 3.10: Rumore medio (σ_H) dei rivelatori in termini delle componenti di Fourier H_0 a **SNR=1** con i percentili 16-84%, 2.5-97.5% e 0-100% del tempo osservativo di ciascun rivelatore (bande rispettivamente grigie, bianche e linee a "T")

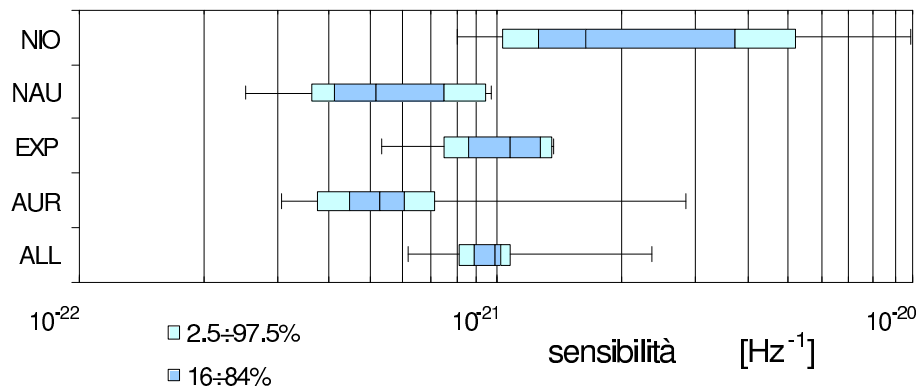


Figura 3.11: Soglia dei rivelatori in termini delle componenti di Fourier H_0 con i percentili 16-84%, 2.5-97.5% e 0-100% del tempo osservativo di ciascun rivelatore (bande rispettivamente grigie, bianche e linee a "T")

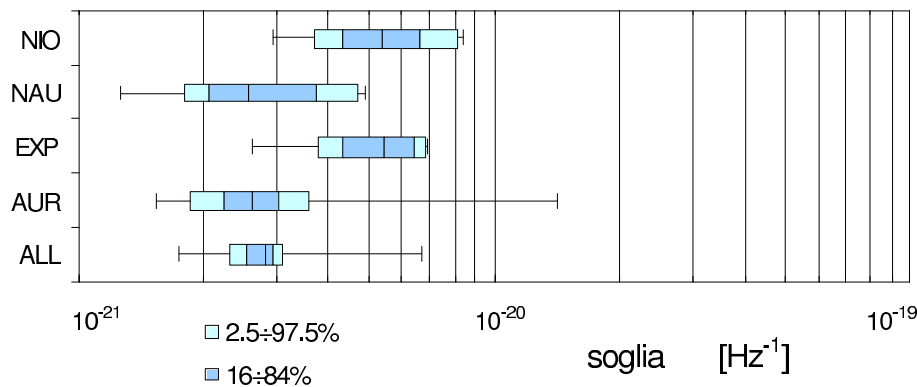


Figura 3.12: Percentuale del tempo osservativo in cui la soglia ricerca eventi è stata $< H_{thr}$

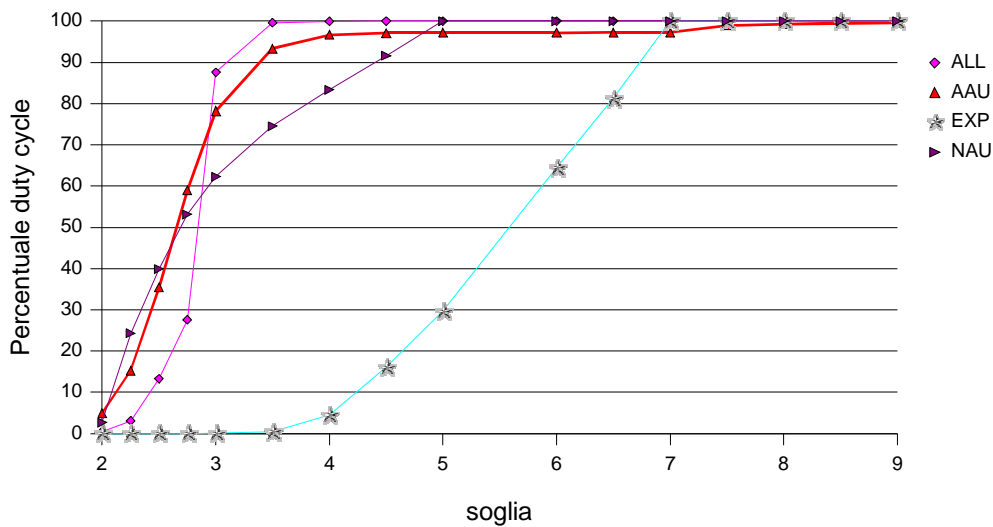
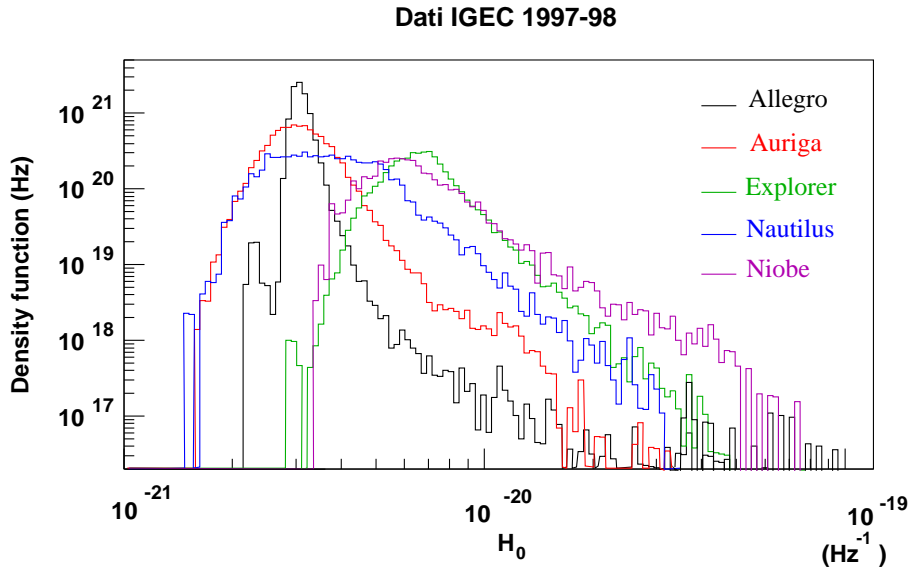


Figura 3.13: Densità di probabilità della ampiezza di tutti gli eventi scambiati nel 1997-98 per ogni rivelatore. Le densità sono normalizzate per avere area unitaria

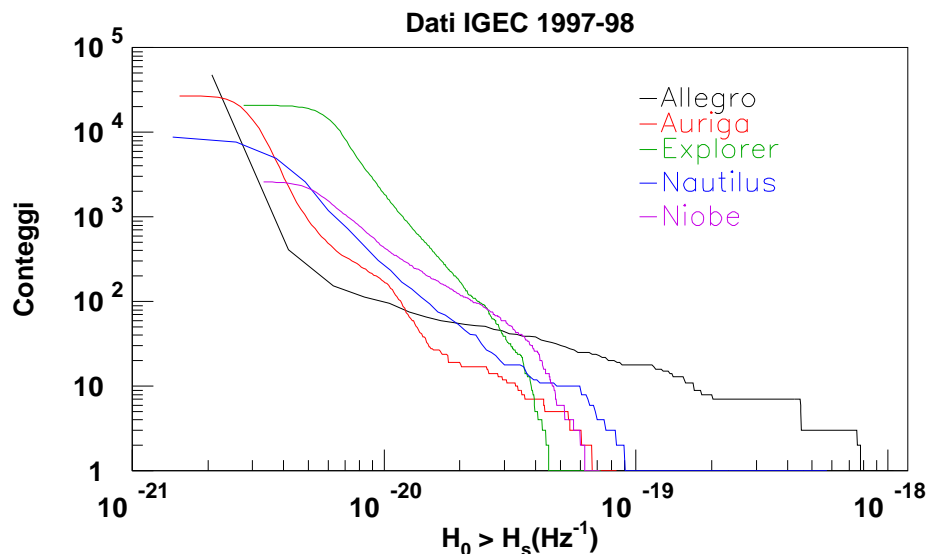


3.4 Distribuzione in ampiezza

Vediamo ora quali ampiezza caratterizzano gli eventi scambiati, dandone la densità di probabilità definita come:

$$\text{Densità di probabilità } (H_0) = \frac{N_{evt}(H_0 - dH/2 < H < H_0 + dH/2)}{N_{evt}dH}$$

dove N_{evt} è il numero totale di eventi di un rivelatore (tab.3.3) e $N_{evt}(H_0 - dH < H < H_0 + dH)$ il numero di eventi con ampiezza compresa tra $H_0 - dH/2$ e $H_0 + dH/2$. Diamo inoltre nella fig.3.14 la distribuzione integrale dei conteggi degli eventi: per ogni valore di una soglia in ampiezza H_s , indichiamo il numero di eventi con $H_0 > H_s$. Dalla fig.3.13 ALLEGRO é ancora il rivelatore che mostra la maggior stazionarietà; inoltre si può notare come si distinguono chiaramente le densità di probabilità dei rivelatori ultracriogenici, ALLEGRO, AURIGA e NAUTILUS, da quelle dei rivelatori criogenici, EXPLORER e NIOBE.

Figura 3.14: Numero di eventi scambiati con ampiezza H_0 maggiore di una certa soglia H_s .

3.5 Distribuzione dei tempi d'arrivo

Supponendo che tutti gli eventi IGEC siano il risultato di processi casuali e che siano caratterizzati da un rate molto basso (fig.3.15), si trova che i loro tempi di arrivo seguono una statistica poissoniana. La distribuzione delle differenze di tempo degli eventi, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, [23] nel caso in cui il rate sia costante segue dunque una curva esponenziale ¹, $e^{-\lambda\tau}$, e nel caso generale in cui il rate varia nel tempo è una sovrapposizione di esponenziali con λ diversa (vedi l'esempio della fig.3.16). Nella fig.3.17 rappresentiamo dunque per ogni rivelatore l'istogramma degli intervalli di tempi Δt tra gli eventi IGEC di ogni rivelatore; ALLEGRO mostra di essere molto stazionario nei lambda, un evento circa ogni 1000 s, mentre gli altri rivelatori hanno decisamente dei rate non stazionari nel tempo, i cui istogrammi sono rappresentate nelle fig.3.19(fig.3.15). Dalle fig.3.17 possiamo dunque concludere che in buona approssimazione gli eventi scambiati dall'accordo IGEC si distribuiscono come se fossero i risultati di soli processi casuali; inoltre dalle 3.19 si nota come ALLEGRO sia il rivelatore con la maggiore stazionarietà dei rate.

Se vogliamo poi calcolarci i rate degli eventi in funzione di una soglia in ampiezza H_{thr} , non possiamo usare la tecnica usuale per il calcolo dei rate: non possiamo più infatti dividere il tempo di osservazione in un numero (fisso per tutte le ampiezza) di intervalli di tempo dT uguali e poi contare quanti ($N_{evt}(dT)$) eventi caschino in questi intervalli; come si vedi infatti

¹ perché equivale alla probabilità di non avere eventi nell'intervallo τ

dalla fig.3.14, con soglie alte avremo solo pochi eventi con $H_0 > H_{thr}$, dunque in ogni singolo intervallo di tempo dT avremo $N_{evt}(dT)$ molto bassi e quindi un grande errore statistico di conteggio ($1/\sqrt{N_{evt}(dT)}$). Per avere dunque sempre lo stesso errore statistico sulla stima di ogni lambda, usiamo una diversa tecnica per il calcolo del rate, detta a “conteggio fisso”: fissiamo infatti a priori il numero di eventi che vogliamo ci siano in ogni intervallo di tempo; quindi dividiamo il tempo di osservazione di ogni rivelatore in intervalli di tempo dT_i in modo da avere sempre lo stesso numero di eventi $N_{evt} = 9$; i λ_i sono semplicemente N_{evt}/dT_i . Naturalmente se la soglia in ampiezza è troppo alta il numero di campioni di lambda diventa troppo basso per poterne stimare la distribuzione con un errore accettabile.

Figura 3.15: Percentili dei rate dei rivelatori dell'accordo IGEC.

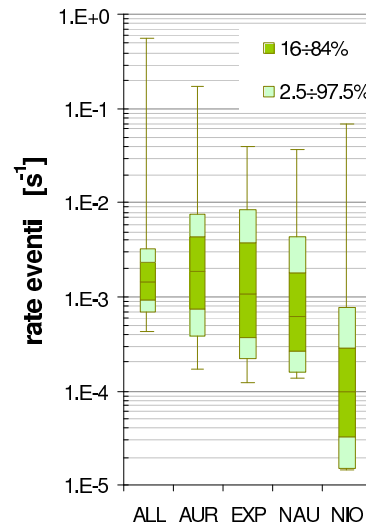


Figura 3.16: Istogramma dei Δt tra gli eventi considerando un anno caratterizzato da un rate simulato di eventi così variabile: 1 giorno con rate di $1/8s$ e 364 giorni con rate di $1/600s$. La non stazionarietà dei rate appare chiaramente come sovrapposizione di distribuzioni esponenziali.

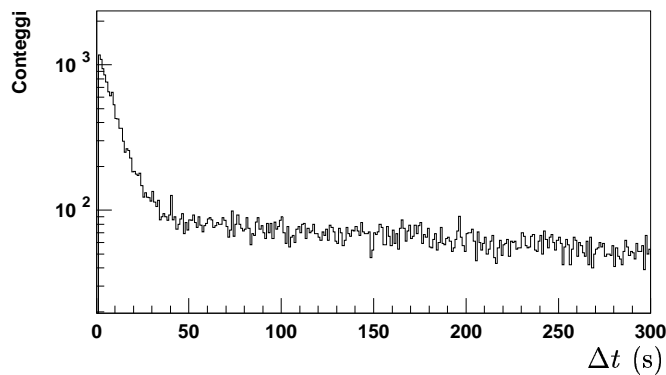
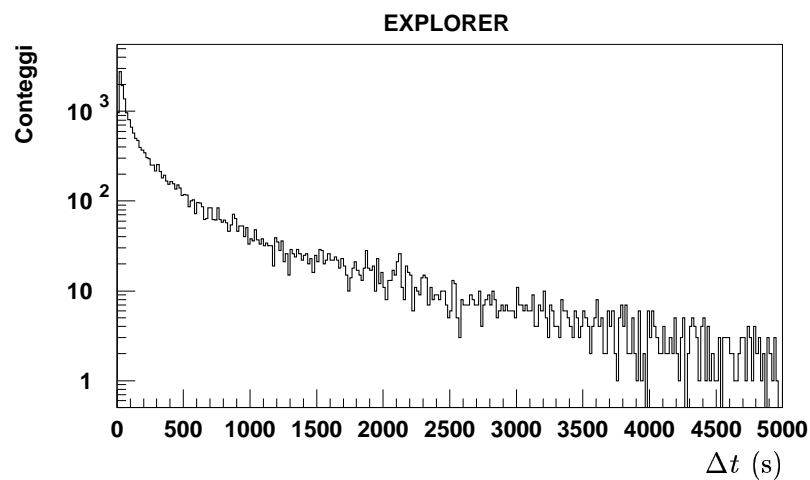
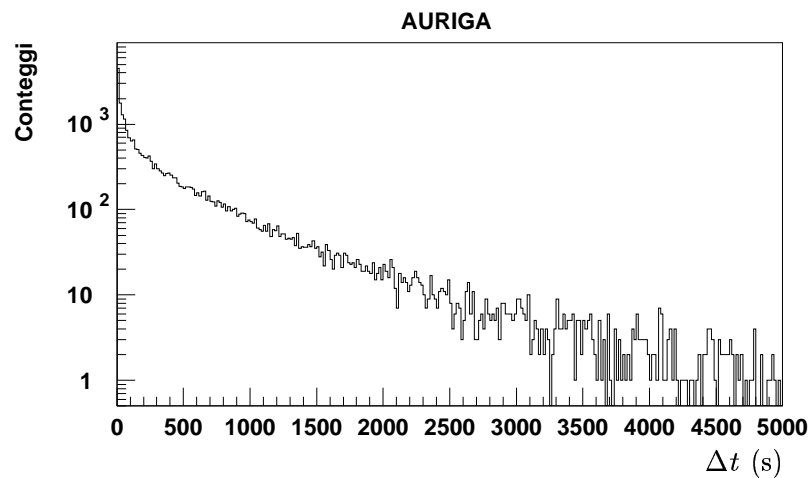
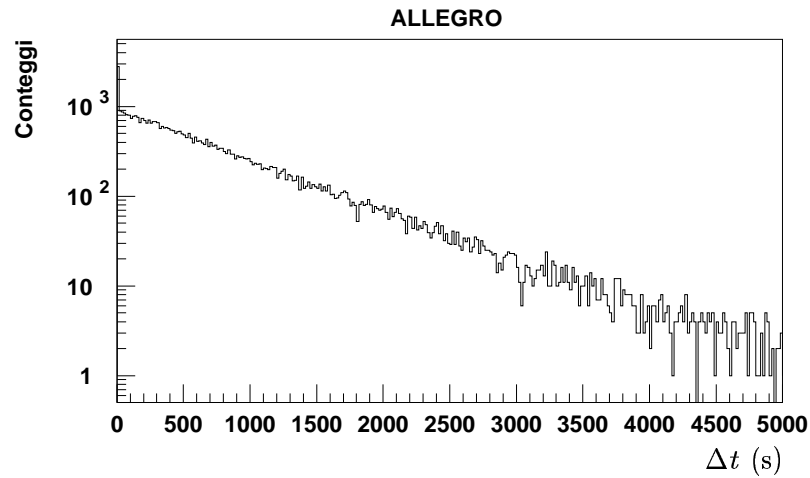


Figura 3.17: Istogramma dei Δt di IGEC; sono naturalmente stati esclusi i Δt dovuti a periodi in cui il rivelatore non funzionava; in tutte le figure si nota un picco a Δt piccoli ($< 100s$), che è un problema legato non ad un effetto fisico ma ad un problema di binning; infatti cambiando il binning esso scompare (fig.3.18) tranne che per ALLEGRO. L'analisi IGEC comunque è stata fatta selezionando solo quegli eventi di ALLEGRO con $\Delta t > 1s > \tau_w \approx 1s$.



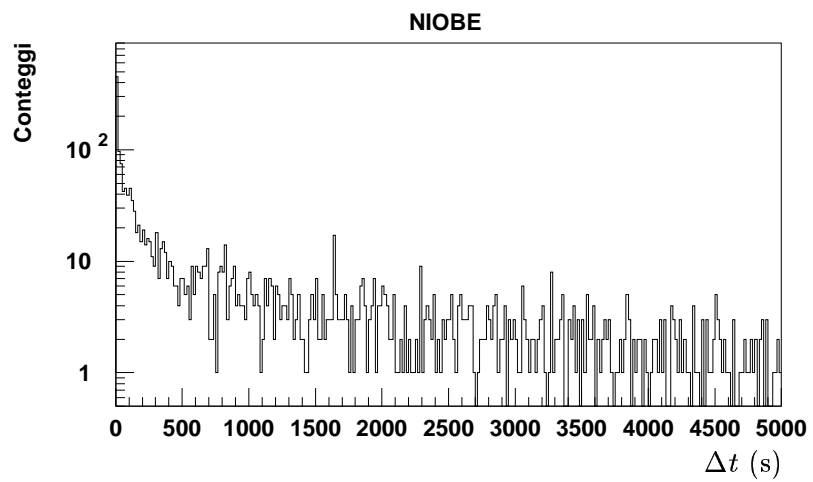
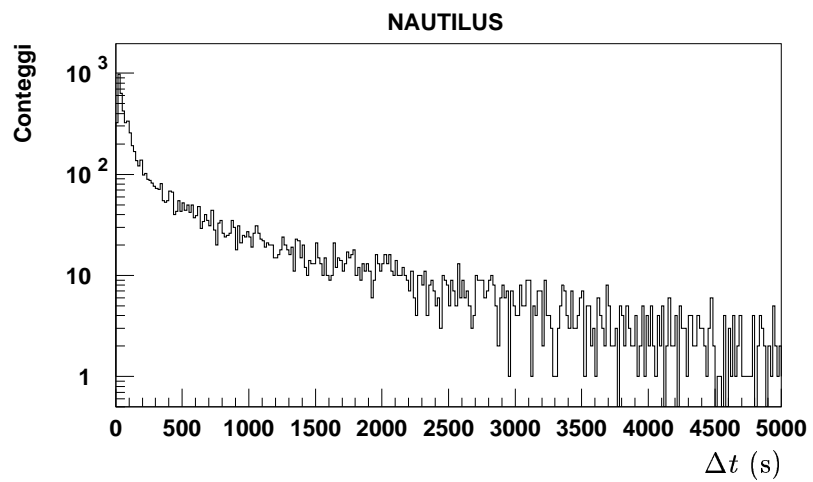
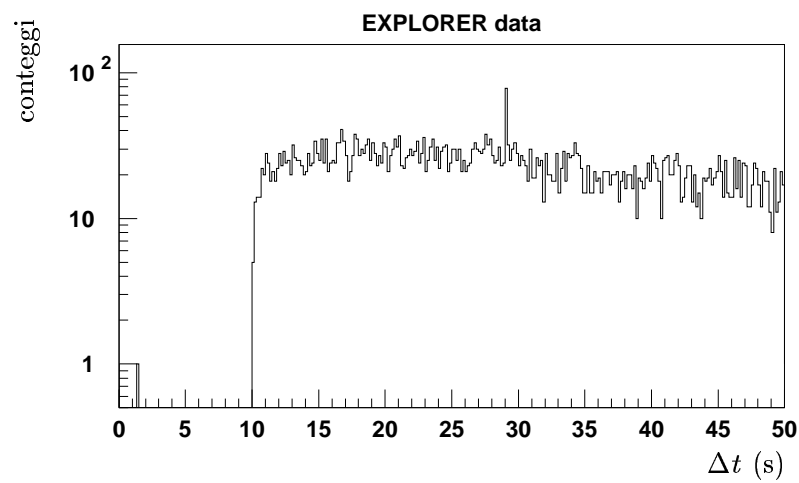
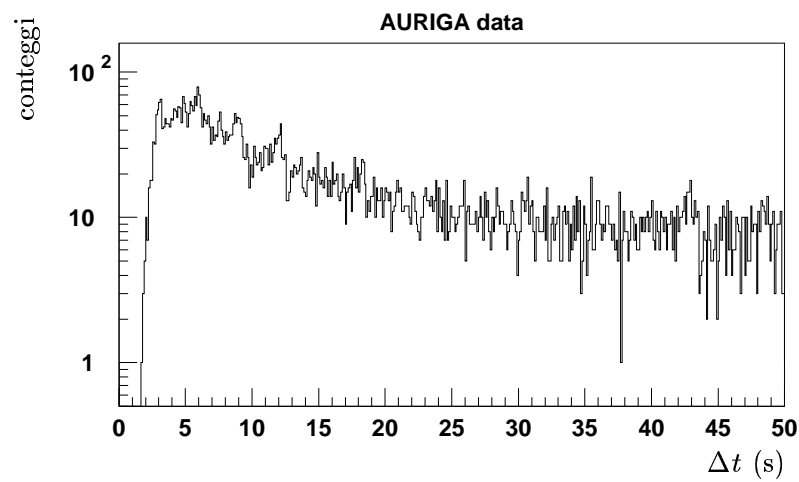
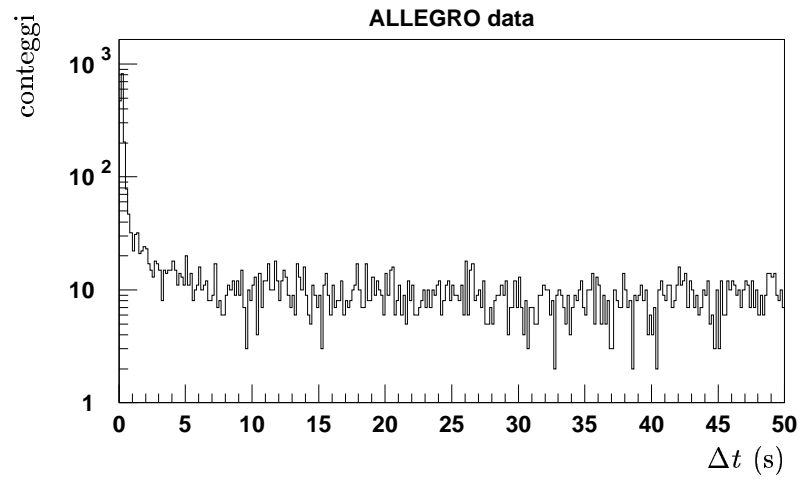


Figura 3.18: Come per la fig.3.17 ma solo fino a $dt = 50s$ 

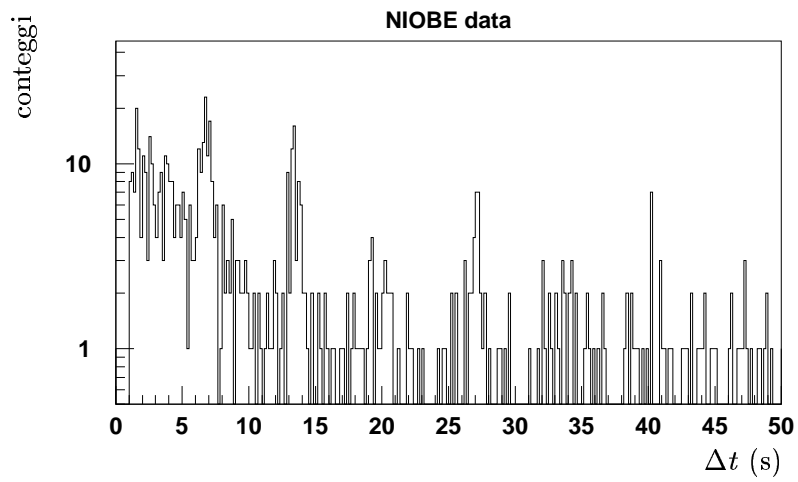
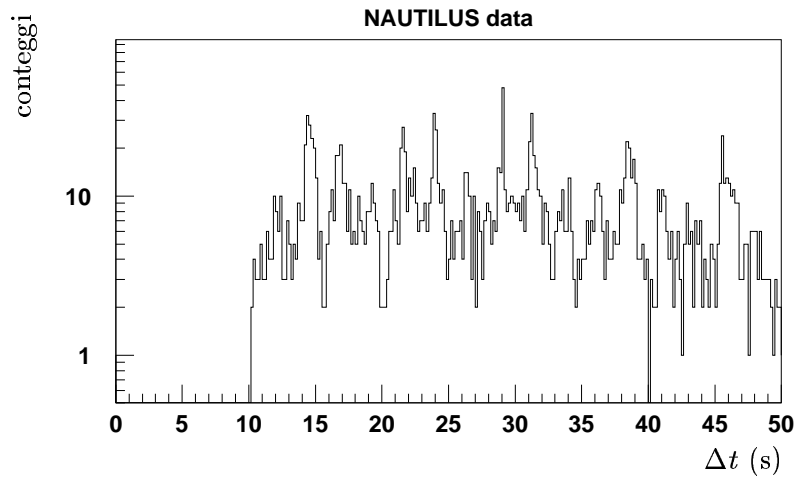
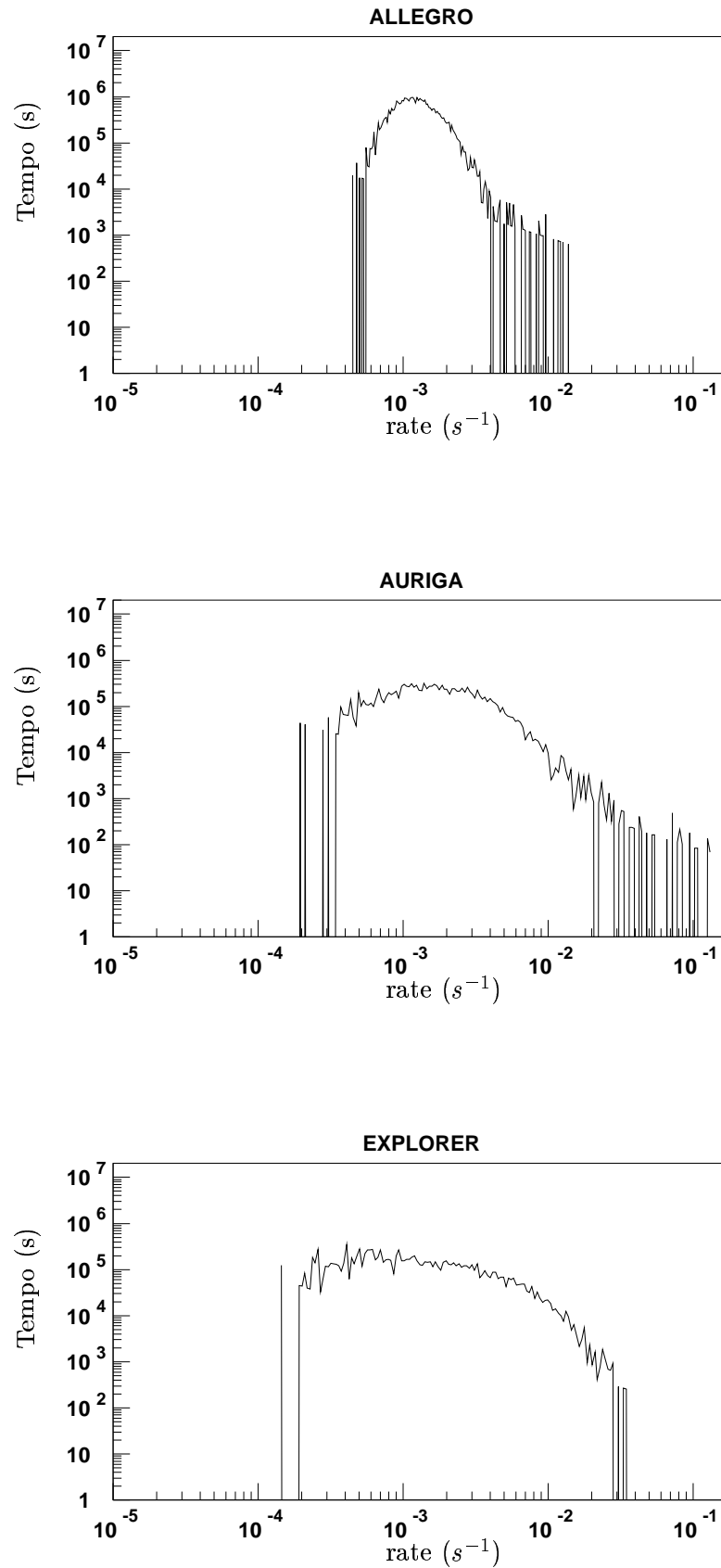
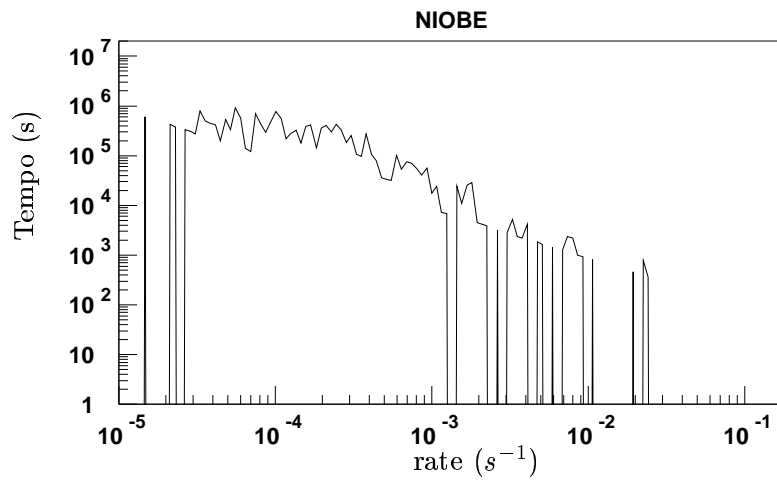
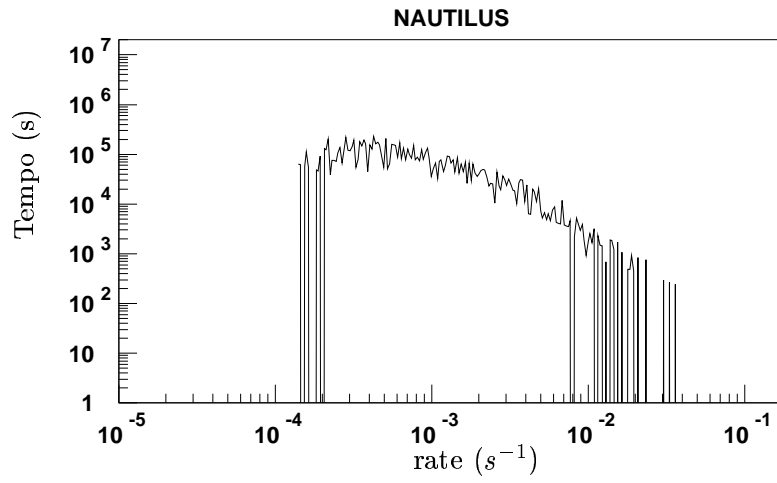


Figura 3.19: Istogramma dei rate di tutti gli eventi scambiati IGEC.



3.6 Incertezze sull'ampiezza

AURIGA, EXPLORER e NAUTILUS hanno dati filtrati per ampiezza H_0 dell'impulso che mostrano statistica gaussiana con deviazione standard σ_H ; quindi a qualunque segnale viene linearmente sovrapposta una dispersione gaussiana. Quindi quando selezioniamo gli eventi in ampiezza in base ad una soglia H_{thr} a causa dell'effetto del rumore gaussiano sulle ampiezze, la probabilità di un evento di ampiezza H_0 di essere sopra soglia è dato dalla:

$$Erf(H_0, H_{thr}, \sigma_H) = \frac{1}{\sigma_H \sqrt{2\pi}} \int_{H_{thr}}^{+\infty} e^{-\frac{(H-H_0)^2}{2\sigma_H^2}} dH \quad (3.4)$$

ALLEGRO e NIOBE non filtra per ampiezza, ma per energia. Le ampiezze dunque degli eventi scambiati, proporzionali alle radici quadrate dell'energia, seguono una distribuzione del χ^2 non centrale che si può approssimare ad una gaussiana entro pochi sigma attorno al valore medio. Anche per ALLEGRO e NIOBE dunque, in prima approssimazione, l'eq.3.4 resta valida.

Capitolo 4

Metodi di analisi dati

In questo capitolo illustreremo le tecniche che sono state sviluppate in questi mesi con lo scopo di ricercare le coincidenze fra N-rivelatori, di stimare la probabilità che queste siano dovute solo ad eventi casuali e di porre dei limiti superiori al rate e alle ampiezze delle onde gravitazionali passanti per la Terra durante il periodo di osservazione di IGEC nel 1997-98.

4.1 Ricerca coincidenze

Date N-liste di eventi caratterizzati dai tempi di arrivo t_i e dai corrispondenti errori sui tempi di arrivo δ_{t_i} , c'è una coincidenza tra N-eventi delle N-liste [24] se i loro tempi di arrivo soddisfano alla:

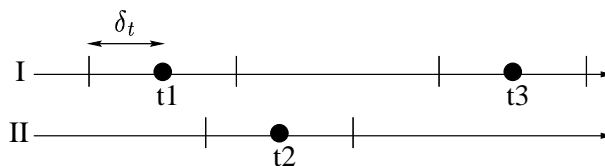
$$|t_i - t_j| < \delta_{t_i} + \delta_{t_j} \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

I dati IGEC sono supposti avere un errore temporale di $\pm 0.5s$ ognuno, in quanto è un buon compromesso tra la richiesta di un ridotto numero di coincidenze accidentali e una piccola probabilità di “false dismissal”. La eq.4.1 diventa dunque (fig.4.1):

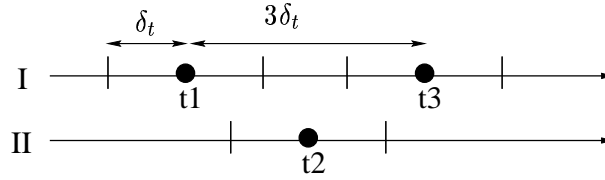
$$|t_i - t_j| < 2\delta_t = 1s \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

Nel caso in cui gli eventi di una lista distino tra loro meno di $3\delta_{t_i} = 1.5s$ si potrebbe verificare

Figura 4.1: Esempio di coincidenza tra due liste di eventi



il caso in cui un evento di un'altra lista è in coincidenza con due eventi della prima lista (fig.4.2). Tuttavia rispetto alle coincidenze fra singoli eventi in liste diverse queste coincidenze multiple sono estremamente improbabili.

Figura 4.2: Esempio in cui un evento di una lista è in coincidenza con più di un evento di un'altra lista.

4.1.1 Tecnica utilizzata

Per ricercare le coincidenze fra N rivelatori si possono usare varie tecniche:

- Si possono cercare tutte le coppie, terne, triple ecc, che soddisfino alla eq.4.1. Se non si considerano l'ordinamento temporale degli eventi vengono svolte molte operazioni inutili; questo rallenta molto la procedura di ricerca eventi e nel caso in cui si faccia una analisi dei dati molto complessa , comporta dei tempi di esecuzione proibitivi.
- Noi abbiamo sviluppato una tecnica ricorsiva di ricerca coincidenze che sfrutta l'ordinamento temporale degli eventi di ciascuna lista e che dunque non solo è molto veloce ma richiede poca memoria per essere eseguita; se per esempio vogliamo trovare le coincidenze fra tre rivelatori, diciamo rI rII e rIII, ricerchiamo le coincidenze (chiamiamo cncI-II) dapprima fra rI e rII sfruttando l'ordinamento temporale degli eventi di rI e rII; poi, definendo opportunamente l'errore delle cncI-II, cerchiamo le coincidenze tra cncI-II e rIII.

Vediamo dunque nel dettaglio questa seconda tecnica: prendiamo il primo evento di rI e rII, detti $evt1_I$ e $evt1_{II}$ e controlliamo se $evt1_I$ e $evt1_{II}$ sono in coincidenza; se troviamo una coincidenza la registriamo in memoria come un evento di cncI-II caratterizzato da tempo di arrivo $t_{cncI-II}$ e errore sul tempo $\delta t_{cncI-II}$ dati da:

$$t_{cncI-II} = \frac{t_{evt1_I} + t_{evt1_{II}}}{2} \quad (4.3)$$

$$\delta t_{cncI-II} = \frac{(\delta t_{evt1_I} + \delta t_{evt1_{II}}) + |t_{evt1_I} - t_{evt1_{II}}|}{2} = \quad (4.4)$$

$$= \frac{1s + |t_{evt1_I} - t_{evt1_{II}}|}{2} \quad (4.5)$$

dove t_{evt1_I} e $t_{evt1_{II}}$ sono i tempi di arrivo di $evt1_I$ e $evt1_{II}$ e $\delta t_{evt1_I} = \delta t_{evt1_{II}} = \delta t = 0.5s$ i loro rispettivi errori. Indipendentemente dal fatto di avere individuato o meno una coincidenza consideriamo quindi l'evento successivo a quello tra t_{evt1_I} e $t_{evt1_{II}}$ con tempo di arrivo inferiore. Ricominciamo dunque il ciclo, controlliamo se c'è una coincidenza e poi passiamo all'evento successivo a quello più "giovane" e così via ciclando fino alla fine di una delle due liste di coincidenze (fig.4.3). È importante sottolineare che la tecnica sopra descritta ci permette di ricercare coincidenze fra eventi con errore diverso l'uno dall'altro; la ricerca coincidenza

Figura 4.3: Illustrazione della tecnica di ricerca coincidenze che sfrutta l'ordinamento temporale degli eventi.

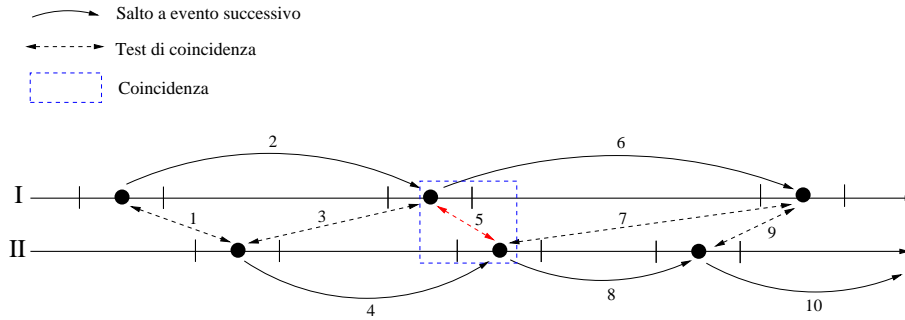
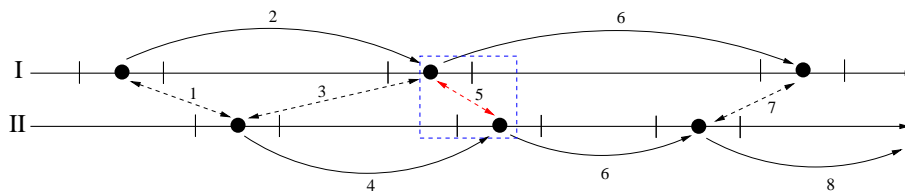


Figura 4.4: Come nella fig.4.3 ma mostriamo come si possano escludere dall'analisi le coincidenze fra più di un evento di una lista con lo stesso evento di un'altra lista (fig.4.2)



sviluppata è dunque aperta ad un ulteriore sviluppo del protocollo IGEC, in cui ogni evento venisse caratterizzato da un proprio errore sul tempo di arrivo; inoltre ci permette di sviluppare una ricerca coincidenza a “coppie” tra N-rivelatori che risulterà essere molto efficiente e veloce.

Facendo solo piccolissime modifiche al codice sorgente possiamo poi ricercare le coincidenze escludendo le coincidenze multiple (fig.4.3); infatti basta che nel caso in cui si trovi una coincidenza “doppia” si passa al successivo evento di entrambi i rivelatori, evitando dunque che un evento di una lista sia in coincidenza con due eventi dell'altra (fig.4.4).

A questo punto ricerchiamo le coincidenze tra la lista di eventi $cncI-II$ e $rIII$ (fig.4.6); che equivale a testare la eq.4.1 contemporaneamente sulla tre liste eventi di rI , rII e $rIII$ (fig.4.5). Tale tecnica può essere poi estesa alla ricerca di coincidenza tra N rivelatori, con N qualsiasi, semplicemente ridefinendo opportunamente le eq.4.3 e 4.5.

Figura 4.5: Esempio di come sia possibile ricercare le triple attribuendo un opportuno “errore” alla coincidenza tra due dei tre rivelatori

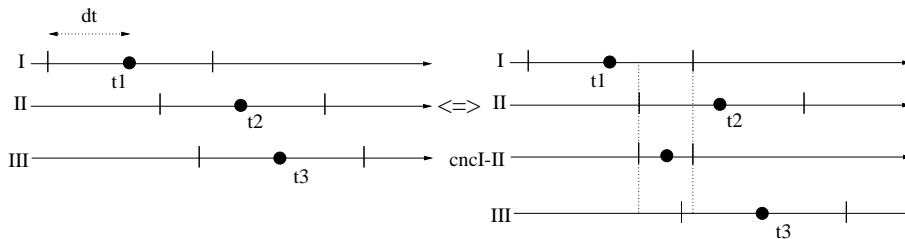
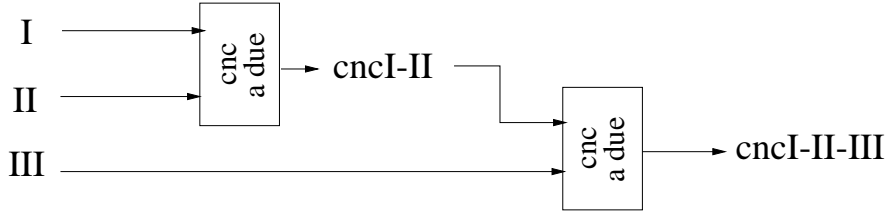


Figura 4.6: struttura ciclica delle ricerche delle triple sfruttando le coincidenze a due.

4.2 Predizioni

Trovare le coincidenze fra le liste eventi di più rivelatori è fondamentale per poter vedere se un'onda gravitazionale ha eccitato i rivelatori funzionanti al momento del suo passaggio per la Terra. Tuttavia questa ricerca non è sufficiente in quanto le coincidenze trovate potrebbero non essere dovute all'eccitazione gravitazionale, ma solo a casuali coincidenze fra eventi di rumore dei vari rivelatori. È dunque necessario poter stimare il numero di coincidenze casuali fra rivelatori per poter poi attribuire una probabilità al fatto che le coincidenze trovate siano effettivamente dovute all'interazione con onde gravitazionali e non dovute al caso. Il fondo di coincidenze atteso può essere calcolato in due modi: uno teorico che si basa sui rate di eventi dei singoli rivelatori; uno sperimentale che si basa su una analisi di coincidenze sulle liste degli eventi.

4.2.1 Previsione teorica

Prendiamo N liste di tempi di arrivo distribuiti poissonianamente nel tempo (cap.3.5 e [23]); queste in buona approssimazione ci rappresentano gli eventi dei rivelatori di IGEC, che nel par.3.5 abbiamo mostrato essere caratterizzati da tempi di arrivo casuali; inoltre anche se ci fossero degli eventi gravitazionali, questi avrebbero un rate molto inferiore a quello degli eventi accidentali a due rivelatori e quindi non influenzano la distribuzione dei tempi di arrivo di tutti gli eventi. Se $\lambda^{(k)}$ è il rate del k -esimo di N rivelatori e il rate atteso teorico delle coincidenze tra gli eventi di questi rivelatori è:

$$\lambda_{th} = N(2\delta t)^{N-1} \prod_{i=1}^N \lambda^{(k)} \quad (4.6)$$

Supponiamo infatti che $\lambda^{(k)}(t)$ $i = 1, \dots, N$ siano costanti nel tempo, cioè $\lambda^{(k)}(t) = \lambda^{(k)}$. Inoltre poiché la probabilità che i tempi di arrivo di una certa N -upla sia entro un certo intervallo T è indipendente dall'ordine dei tempi di arrivo, non è restrittivo considerare solo il caso in cui i tempi degli N -eventi siano ordinati temporalmente secondo la

$$t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(N)} \quad (4.7)$$

con $t^{(N)} - t^{(1)} < T$. Per tener conto di tutte le possibili ordinazioni dei tempi di arrivo bisognerà poi moltiplicare il risultato finale per $N!$. Osserviamo dunque che la probabilità di

avere un evento di un rivelatore k entro un intervallo di tempo $\Delta t^{(k)}$ è dato da [23]:

$$P^{(k)} = 1 - e^{-\lambda^{(k)} \Delta t^{(k)}} \approx \lambda^{(k)} \Delta t^{(k)}$$

nel caso $\lambda \Delta t \ll 1$. Sfruttando ora l'indipendenza dei processi dei vari rivelatori, possiamo dire la probabilità che ci sia un evento di ogni rivelatore nell'intervallo $\Delta t^{(k)}$ è dato da:

$$\prod_{k=1}^N P^{(k)} = \prod_{k=1}^N \lambda^{(k)} \Delta t^{(k)} \quad (4.8)$$

Passiamo ora ai differenziali $\Delta t \rightarrow dt$ e integriamo nel tempo sul volume M -dimensionale definito dalla 4.7:

$$T \lambda_{th} = \int_0^T dt^{(1)} \int_{t^{(1)}}^{t^{(1)}+2\delta t} dt^{(2)} \dots \int_{t^{(N)}}^{t^{(N)}+2\delta t} dt^{(N)} \prod_{k=1}^N \lambda^{(k)} = \quad (4.9)$$

$$= T \prod_{k=1}^N \lambda^{(k)} \int_0^{2\delta t} dt^{(2)} \dots \int_0^{2\delta t} dt^{(N)} = \quad (4.10)$$

$$= T \frac{(2\delta t)^{N-1}}{(N-1)!} \prod_{k=1}^N \lambda^{(k)} \quad (4.11)$$

che moltiplicata per il fattore correttivo $N!$ mi dà esattamente la 4.6.

Se i rate dei rivelatori sono invece delle funzioni del tempo $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)}(t)$, la eq.4.6 è valida solo istantaneamente e dunque il rate atteso globale è la media sul tempo:

$$\lambda_{th} = \frac{N(2\delta t)^{N-1}}{T} \int_0^T \prod_{i=1}^N \lambda^{(k)} dt \quad (4.12)$$

Se ora i rate dei rivelatori sono dei processi stocastici ergodici scorrelati si ha per l'ergodicità che la media sul tempo è equivalente alla media d'ensemble [23]:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \prod_{i=1}^N \lambda^{(k)} dt = \langle \prod_{i=1}^N \lambda^{(k)} \rangle_{\text{ensemble}} \quad (4.13)$$

Inoltre per la scorrelazione dei rate la media d'ensemble [23] del prodotto è uguale al prodotto delle medie dei singoli rivelatori:

$$\langle \prod_{i=1}^N \lambda^{(k)} \rangle = \prod_{i=1}^N \langle \lambda^{(k)} \rangle \quad (4.14)$$

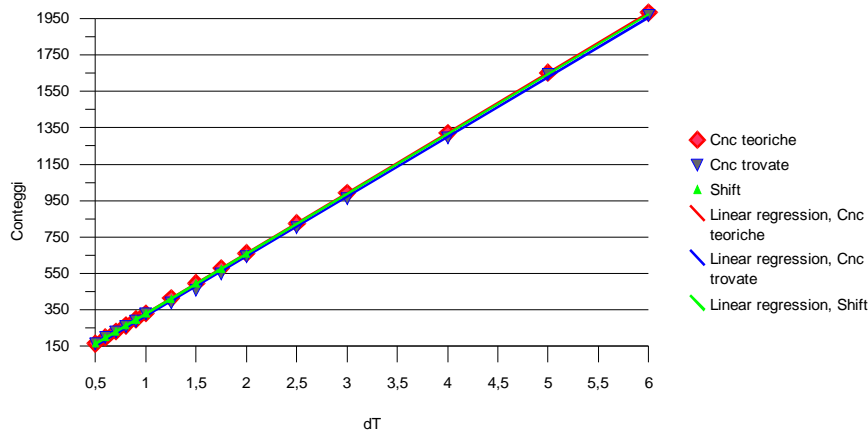
usando inversamente la eq.4.13 si ha:

$$\lambda_{th} = \frac{N(2\delta t)^{N-1}}{T} \prod_{i=1}^N \int_0^T \lambda^{(k)} dt \quad (4.15)$$

Sfruttando l'ergodicità e la scorrelazione dei rate possiamo dunque ancora usare l'eq.4.6 basta sostituire $\lambda^{(k)}$ con la loro media nel tempo:

$$\overline{\lambda^{(k)}} = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda^{(k)}(t) dt \approx \frac{N^{(k)}_{\text{evt}}}{T} \quad (4.16)$$

Figura 4.7: Numero di coincidenze trovate (linea blu) tra due liste di eventi simulati in funzione della semifinestra di coincidenza δt ; i rate delle due simulazioni è di 113 e 175 eventi al giorno ed il tempo in comune è di un anno; presentiamo per confronto le predizioni dell'eq.4.6 (linea rossa) e quelle ottenute con il metodo degli shift (linea verde)



con N_{evt}^k il numero di eventi del k-esimo rivelatore nel tempo di osservazione T.

La scorrelazione dei processi è invece necessaria, nel caso in cui $\lambda^{(t)}$ dipenda dal tempo, per poter riottenere la 4.6 attraverso il passaggio 4.8 Abbiamo dunque creato tre liste di tempi di arrivo distribuiti poissonianamente nel tempo con rate di 113, 175 e 81 eventi al giorno per la durata di 364 giorni; ne abbiamo ricercato le coincidenze a due (fig.4.7) e a tre (fig. 4.9) con varie finestre di coincidenza δt e abbiamo confrontato i risultati con le previsioni della 4.6. In più abbiamo ricalcolato le coincidenze a due escludendo le coincidenze multiple (fig. 4.8). Le figure 4.7-4.9 ci dicono dunque che con finestre piccole, $\delta t < 15s$, la 4.6 ci predice correttamente in numero di coincidenze atteso; in più confrontando le fig. 4.8-4.7 si vede come la 4.6 preveda il numero di tutte le coincidenze, multiple incluse. Sempre confrontando le figure 4.7-4.8 si vede poi che la percentuale delle coincidenze multiple sia al massimo il 2% del totale per $\delta t < 6s$ e che cresca linearmente secondo la $\%_{multiple} = 0.45 \cdot dt - 0.2$ ($r=0.98$) (fig.4.10).

Se invece i $\lambda^{(t)}$ non sono stazionari e non sappiamo se sono correlati, allora dobbiamo calcolarci la 4.6 su periodi dt_i in cui i rate sono approssimativamente stazionari e poi mediare i $(\lambda_{th})_i$ ottenuti [24]:

$$(\lambda_{th})_m = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^i (\lambda_{th})_i dt_i \quad (4.17)$$

4.2.2 Shift

Il secondo metodo usato per stimare il rate delle coincidenze accidentali è un metodo empirico che si basa sulle liste delle serie temporali degli eventi considerandone la struttura temporale; tale tecnica segue le seguenti tappe:

Figura 4.8: Come la fig.4.7 ma non contando le coincidenze multiple tra più di un evento di una lista con un evento dell'altra (fig.4.3).

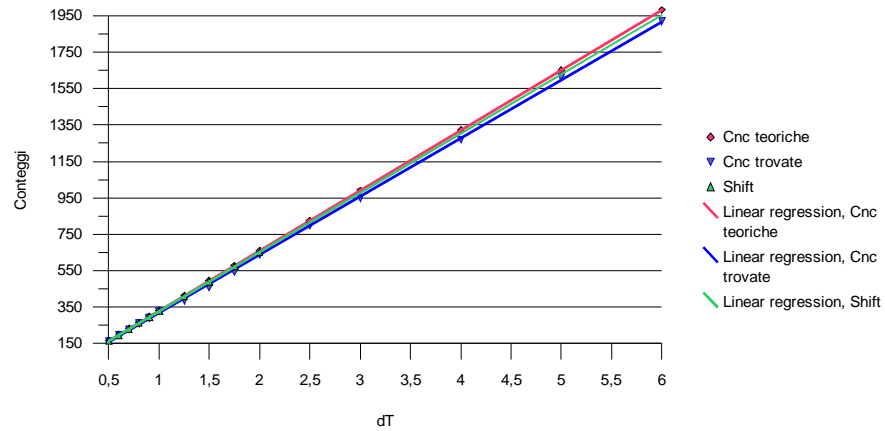


Figura 4.9: Come la fig.4.7, ma tra tre liste simulate; il terzo rivelatore ha rate di 81 eventi al giorno.

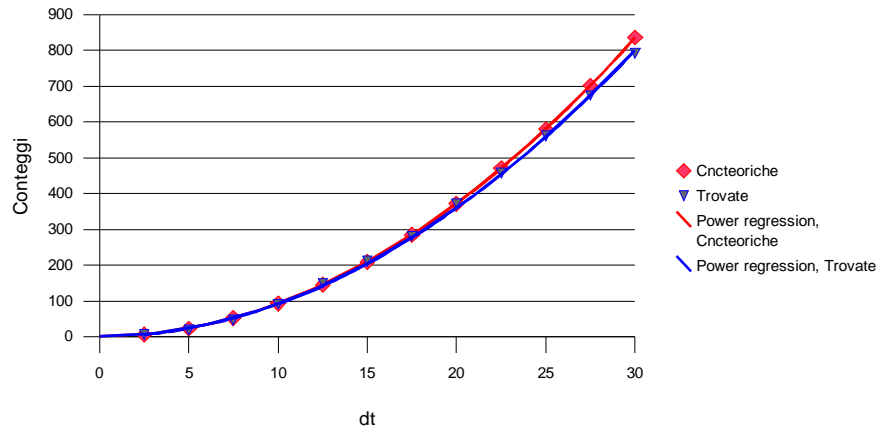


Figura 4.10: Percentuale di coincidenza multipla, cioè in cui un solo evento di una lista è in coincidenza con più eventi di un'altra lista eventi (fig.4.3).

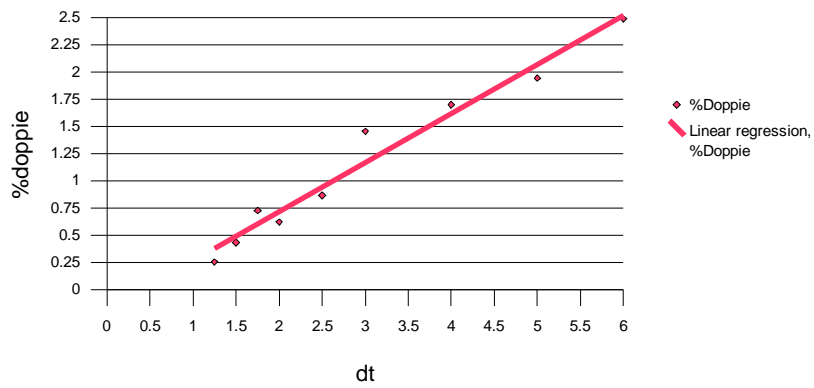
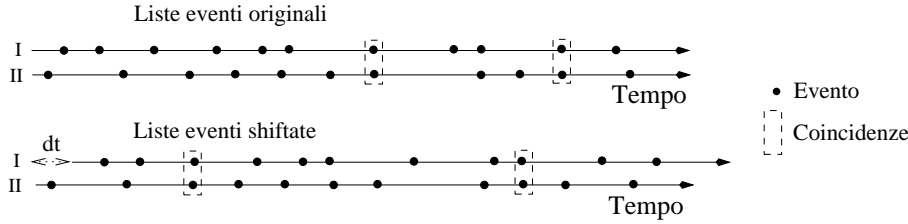


Figura 4.11: Esempio di shift fra due liste di tempi di arrivo

1. Si traslano le $N-1$ liste di eventi e start-stop di un tempo Δt_i maggiore in modulo del doppio della finestra di coincidenza ($|\Delta t_i| > 2(2\delta t)$) (fig.4.11) ;
2. Si calcola il nuovo periodo comune T_{obs}^{shift} ;
3. Si trovano le coincidenze e si rinormalizza il conteggio per T_{obs}/T_{obs}^{shift} per evitare effetti dovuti a variazioni del periodo di osservazione comune; si ottiene n_a .
4. Si ripetono i passi 2-4 incrementando e decrementando Δt attorno allo zero fino a \pm un tempo limite Δt_{max} ; nel nostro caso incrementiamo di $2s$ alla volta fino a che $\Delta t_{max} = \pm 2000s$.
5. Mediamo infine i vari valori ottenuti di n_a , trovando $\langle n_a \rangle$

Abbiamo simulato questo metodo attraverso lo stesso Montecarlo descritto a pag.4.2.1; come si vede dalla fig.4.7 le coincidenze previste con il metodo degli shift concorda perfettamente con quelli della previsione teorica. La tecnica degli shift non ci permette soltanto di calcolarci in modo empirico il numero di coincidenze attese tra N -liste di eventi, ma anche di controllare se i rate dei rivelatori sono indipendenti fra loro.

Infatti una eventuale correlazione fra i rate dei due rivelatori sarebbe evidenziata da una dipendenza delle predizioni di accidentalità mediante gli shift dal tempo degli shift. Questo effetto sarebbe più facilmente individuabile da medie sui risultati degli shift centrati non in zero ma attorno ad un valore T' compreso in un intervallo che va da zero a 48 ore (e similmente da 0 a 10 giorni). Per costruzione questa lista $n_c(T)$ equivale dunque alle previsioni dati dalla 4.17. Se dunque troviamo che $n_c(T)$ sono in accordo con le previsioni della 4.6 allora per transitività la eq.4.17 equivale alla 4.6; la possibilità di poter usare l'eq 4.6 con 4.16 al posto della eq.4.17 ci permette dunque di semplificare notevolmente l'analisi dati IGEC.

4.2.3 Compatibilità coincidenze trovate con le previsioni

Avendo dunque due diverse stime delle coincidenze attese, $\langle n_a \rangle$ (shift) e n_{th} (teoriche), quando troviamo delle coincidenze n_c la probabilità che n_c sia dovuta al caso rispetto a $\langle n_a \rangle$

e n_{th} sono date rispettivamente da:

$$P(n \geq n_c | \langle n_a \rangle) = \sum_{k \geq n_c}^{+\infty} e^{-\langle n_a \rangle} \frac{(\langle n_a \rangle)^k}{k!} \quad (4.18)$$

$$P(n \geq n_c | n_{th}) = \sum_{k \geq n_c}^{+\infty} e^{-n_{th}} \frac{(n_{th})^k}{k!} \quad (4.19)$$

4.2.4 Fluttuazioni

L'eq.4.6 non ha errore se applicata ad uno specifico T_{obs} ; se tuttavia vogliamo conoscere le proprietà statistiche dell'osservatorio IGEC considerando T_{obs} solo come un campione di una popolazione allora il campione mi dà, attraverso la 4.6, una stima della media e della dispersione della popolazione; i contributi della dispersione attorno al valore medio della popolazione sono essenzialmente due: il primo dovuto alle fluttuazioni statistiche del campione rispetto alla popolazione; il secondo è dovuto invece alla non stazionarietà dei rate dei singoli rivelatori. La dispersione dovuta alle fluttuazioni statistiche dell'eq.4.6 può essere calcolato simulando delle distribuzioni poissoniane centrate sui $\lambda^{(k)}$ dei singoli rivelatori; quindi campionando le distribuzioni simulate e facendo il prodotto dei campioni possiamo ottenere le distribuzioni dei prodotti delle distribuzioni dei $\lambda^{(k)}$; prendendone i percentili 0.25 e 0.75 o la deviazione standard e moltiplicando per il fattore $N\delta t^{N-1}$ possiamo così stimare la fluttuazione statistica di 4.6 calcolata sul campione T_{obs} . La fluttuazione invece dovuta alla non stazionarietà dei rate dei singoli rivelatori può essere calcolata dalle distribuzioni dei $\lambda^{(k)}(t)$ di ogni rivelatore ottenute con la tecnica a “conteggio contante” illustrata nel cap.3.5; ottenute dunque le due distribuzioni dei $\lambda^{(k)}(t)$ di ogni rivelatore possiamo calcolarci la distribuzione prodotto estraendo a caso dei $\lambda^{(k)}(t)$ e moltiplicandoli fra loro; poi moltiplicato il tutto per $N\delta t^{N-1}$ ne calcoliamo la deviazione standard $\sigma_{\lambda_{th}}$, che rappresenta la fluttuazione dell'eq.4.6 dovuto alla non stazionarietà dei $\lambda^{(k)}(t)$. Cioè il rate istantaneo di coincidenze accidentali della popolazione sarà vicino a λ_{th} entro $\sigma_{\lambda_{th}}$.

4.3 Estensione metodi tempo-ampiezza

Fino ad ora abbiamo analizzato i dati IGEC senza considerare le ampiezze degli eventi ma potrebbe essere utile saper rispondere alla domanda se ci siano segnali sopra ad un certa soglia in ampiezza; diventa quindi necessario estendere le tecniche precedenti al caso in cui si considerino solo gli eventi al di sopra di una certa soglia H_{thr} .

4.3.1 Predizione accidentali $H_{o.g.} > H_{thr}$

Se vogliamo avere una predizione delle accidentali in funzione della soglia basta sostituire l'eq.4.6 con la:

$$\lambda_{th}(H_0 \geq H_{thr}) = N(2\delta t)^{N-1} \prod_{i=1}^N \lambda^{(k)}(H_0 \geq H_{thr}) \quad (4.20)$$

Applichiamo cioè la eq.4.6 solo agli eventi che abbiano ampiezza spettrale H_0 maggiore di una soglia H_{thr} .

I valori di H_{thr} devono essere ovviamente maggiori della massima delle soglie applicate da ciascun rivelatore alla propria lista eventi. Può accadere tuttavia che un rivelatore abbia scambiato per una piccola percentuale del suo tempo di osservazione dei dati caratterizzati da una soglia molto alta; quindi se vogliamo che questi piccoli periodi di osservazione non ci limitino nella stima della eq.4.20 dobbiamo eliminare questi intervalli di tempo dai dati analizzati; dobbiamo dunque non solo eliminare i dati caratterizzati da una soglia superiore ad un valore $(H_{thr})_{min}$ ma dobbiamo anche correggere gli START-STOP, in modo da correggere opportunamente il periodo di osservazione.

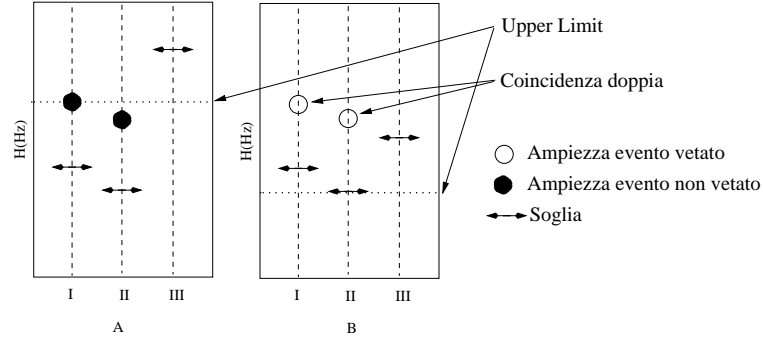
4.4 Tecniche per limiti superiori

4.4.1 In ampiezza

IGEC può porre un limite superiore alla ampiezza spettrale del singolo impulso gravitazionale proveniente da una precisa direzione ed entro un intervallo di tempo; questo intervallo temporale in cui potrebbe esserci un evento gravitazionale può essere di un ora, come per le onde gravitazionali emesse da una supernovae, o di qualche secondo, come per quelle emesse dai "gamma ray bursts". Innanzitutto per dare un limite superiore sull'ampiezza spettrale di un segnale proveniente da una determinata direzione bisogna dividere l'ampiezza degli eventi di ogni rivelatore per la sua funzione di risposta (cap.1). Quindi si può ottenere un limite superiore in ampiezza considerando la massima ampiezza H_{max} di un impulso gravitazionale compatibile con le osservazioni IGEC, per esempio, su scala oraria; cioè se ci sono N-rivelatori funzionanti abbiamo le seguenti possibilità:

- Nel caso ci siano delle coincidenze o singoli eventi non vetati dalle soglie degli altri rivelatori, il limite superiore è dato dall'ampiezza dell'evento o dall'ampiezza massima degli eventi costituenti una coincidenza (fig.4.12); ricordiamo che l'ampiezza di un evento di un rivelatore è vetato dalla soglia di un altro rivelatore, se è inferiore a quest'ultima;
- nel caso in cui ci siano coincidenze o singoli eventi vetati dalle soglie degli altri rivelatori, il limite superiore è data dalla minima delle soglie di tutti i rivelatori (fig.4.12).

Figura 4.12: Esempio di come calcolare il limite superiore in ampiezza dato un trigger: sinistra, la soglia di una dei rivelatori è maggiore degli eventi degli altri 2 in coincidenza; destra: coincidenza tra gli eventi di due rivelatori vetata dalla soglia di un terzo rivelatore.



Tuttavia a causa dell'effetto del rumore gaussiano sulle ampiezze, se vogliamo dare un limite superiore in ampiezza al 95% di confidenza diviene necessario maggiorare il limite superiore ottenuto precedentemente, sostituendolo con $H_{95\%}$ dato dalla:

$$\frac{1}{\sigma_{H_0}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{H_{95\%}} e^{-\frac{(H-H_0)^2}{2\sigma_{H_0}^2}} dH = 0.95$$

4.4.2 Sul rate

Il limite superiore sul numero di onde gravitazionali, $n_{o.g.}$, giunte sulla Terra nel periodo di osservazione T_{obs} è dato al 95% di confidenza risolvendo in $\lambda_{o.g.}$ la [24]:

$$0.05 = \sum_{k=0}^{n_c} \frac{(n_a + \lambda_{o.g.} T_{obs})^k}{k!} e^{-(n_a + \lambda_{o.g.} T_{obs})} \quad (4.21)$$

che per $n_c = 0$ e $n_a \ll \lambda_{o.g.} T_{obs}$ ha come soluzione $n_{o.g.} = \lambda_{o.g.} T_{obs} = 2.99$. Per avere $n_c \approx n_a \approx 0$ possiamo operare in due modi:

- A. Utilizzare i periodi di osservazione a tre rivelatori per calcolarci il limite superiore sul rate di onde gravitazionali;
- B. Abbassare il rate di coincidenze atteso tra due rivelatori selezionando gli eventi con ampiezza superiore ad una soglia $H_{thr}(Hz^{-1})$.

Non abbiamo ancora tuttavia considerato il fatto che un rivelatore risonante cilindrico ha eventi con rumore gaussiano in ampiezza e che la sua funzione di risposta è dato dalla eq.1.17 (fig.3.3 e 3.4). L'effetto del rumore gaussiano implica che all'aumentare della soglia di selezione eventi H_{thr} diminuisce l'efficienza di rivelazione del segnale come calcolato dalla eq.3.4, che dipende dall' H_0 studiato, il rumore del rivelatore σ_H e dalla soglia di ricerca eventi H_{thr} . Da notare comunque che per un valore di $H_0 > H_{thr} + 2\sigma_H$, il valore di $Erf(H_0, H_{thr}, \lambda_H) \approx 1$ (eq.3.4). Per sapere l'efficienza di rivelazione di N rivelatori paralleli funzionanti simultaneamente non

dobbiamo fare altro che calcolarci l'efficienza dell' l -esimo rivelatore, $Er f^{(l)}$ è quindi farne il prodotto:

$$\epsilon_{noise}(H_0, H_{thr}, \sigma_H) = \prod_{l=1}^N Er f^{(l)}(H_0, H_{thr}, \sigma_H) \quad (4.22)$$

Inoltre bisogna considerare l'effetto della funzione di risposta sulla probabilità di ricezione di un segnale: se supponiamo che le sorgenti d'onde gravitazionali siano distribuite uniformemente sulla sfera celeste l'efficienza di rivelazione media di un segnale di ampiezza H_0 rispetto ad una soglia H_{thr} è dato dalla [25]:

$$\epsilon(H_0/H_{thr}) = \frac{1}{4\pi} \int_{H_0^2 \sin^4 \theta \cos^2(2\psi) \geq H_{thr}^2} \sin \theta d\theta d\psi \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

Da notare che questo coefficiente d'efficienza di rivelazione dovuto alla funzione di risposta è indipendente dai rumori σ_H dei vari rivelatori ed è valido limitatamente al caso in cui i rivelatori sono orientati parallelamente l'uno all'altro; nel caso in cui i rivelatori siano disallineati bisogna ricorrere a simulazioni numeriche per poter calcolarci tale coefficiente d'efficienza di rivelazione dovuto alla funzione di risposta [24].

Quindi concludendo il limite superiore sul rate di onde gravitazionali con ampiezza H_0 è dato dalla:

$$\lambda_{o.g.}(H_0) = \frac{n_{o.g.}(H_0 \geq H_{thr})}{T_{obs} \epsilon(H_0/H_{thr}) \epsilon_{noise}(H_0, H_{thr}, \sigma_H)} \quad (4.25)$$

dove H_{thr} è maggiore della massima soglia applicata H_{det} dagli N -rivelatori nella ricerca eventi. Dunque per ogni H_0 fissato devo selezionare gli eventi in base ad una soglia H_{thr} in modo da:

- Rendere massimo il prodotto $\epsilon(H_0/H_{thr}) \epsilon_{noise}(H_0, H_{thr}, \sigma_H)$; tenderemo dunque a scegliere delle soglie di selezione eventi H_{thr} basse.
- Mantenere la condizione $n_a \ll \lambda_{og} T_{obs}$; avremo dunque bisogno di mantenere sufficientemente alte le soglie H_{thr} di ogni rivelatore.

Al limite $H_0 \gg H_{thr}$ il limite superiore sul rate di onde gravitazionali calcolato in un periodo T_{obs} , con $n_c = 0$ e $\lambda_{g.o.} T_{obs} \gg n_a \approx 0$, è dato da $3/T_{obs}$.

Capitolo 5

Risultati osservativi

Utilizzando dunque le tecniche del capitolo precedente si sono analizzati i dati scambiati IGEC che coprono gran parte degli relativi agli anni 1997-98. La ricerca di candidati eventi gravitazionali ha dato esito nullo e sono stati posti nuovi limiti superiori al flusso di onde gravitazionali incidenti sulla Terra.

5.1 Coincidenze

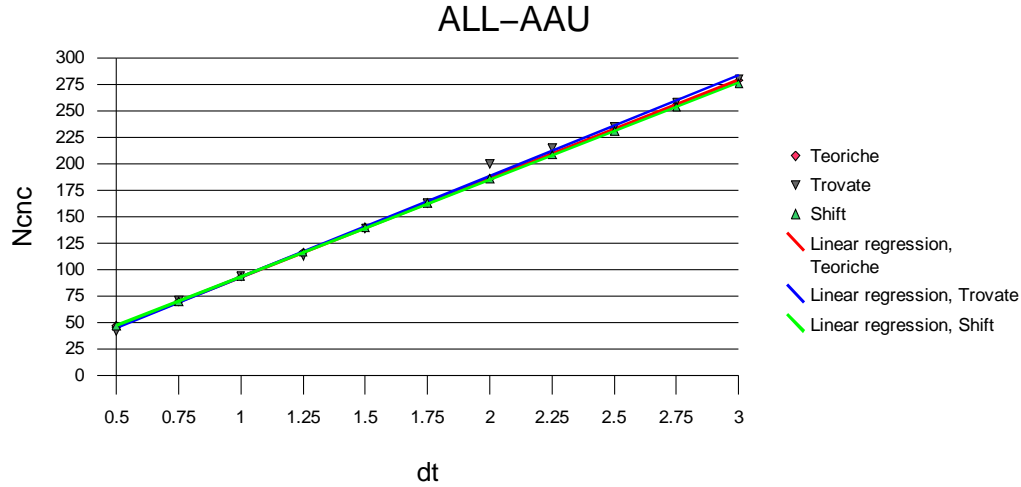
Come prima cosa si sono ricercate le coincidenze fra tutte le coppie possibile di rivelatori con errore sul tempo degli eventi di $\delta t = 0.5s$, confrontandole con le coincidenze accidentali calcolate con l'eq 4.6e con il metodo degli schift; i risultati sono presentati nella tabella 5.1. Come si nota il numero di coincidenze trovate ha un alta probabilità di essere dovuto solo a

Tabella 5.1: Risultati preliminari dell'analisi delle coincidenze a coppie per i dati del 1997-1998 . Le abbreviazioni, AL, AU, EX, NA e NI stanno per ALLEGRO, AURIGA, EXPLORER NAUTILUS e NIOBE rispettivamente. n_c è il numero delle coincidenze trovate, $\langle n_a \rangle$ e $\langle n_a \rangle_{th}$ quelle attese rispettivamente dal metodo degli shift e dall'eq.4.6, $P(n \geq n_c | \langle n_a \rangle)$ e $P(n \geq n_c | \langle n_a \rangle_{th})$ la probabilità delle coincidenze di essere $\geq n_c$ (eq.4.18 e 4.19) e T_{obs} è il tempo di osservazione comune delle coppie di rivelatori.

<i>Rivelatori</i>	n_c	$\langle n_a \rangle$	$\langle n_a \rangle_{th}$	$P(n \geq n_c \langle n_a \rangle)$	$P(n \geq n_c \langle n_a \rangle_{th})$	T_{obs}
AL-AU	42	46.6	45.1	0.77	0.70	103.8
AL-EX	27	31.2	30.9	0.80	0.78	100.7
AL-NA	17	21.6	21.0	0.87	0.84	98.9
AL-NI	1	0.9	1.0	0.61	0.65	27.1
AU-EX	14	20.3	19.2	0.94	0.91	44.1
AU-NA	4	4.2	4.2	0.60	0.60	18.3
AU-NI	1	2.3	2.1	0.90	0.88	37.0
EX-NA	5	7.0	5.7	0.83	0.67	37.5
EX-NI	1	1.1	1.0	0.65	0.61	18.9

coincidenze casuali e quindi non sono attribuibili all'effetto di onde gravitazionali.

Figura 5.1: Numero di coincidenze tra ALLEGRO ed AURIGA in funzione di δt ; confrontiamo quindi il numero di coincidenze trovate con quello previsto con la eq. 4.6 e con il metodo degli shift



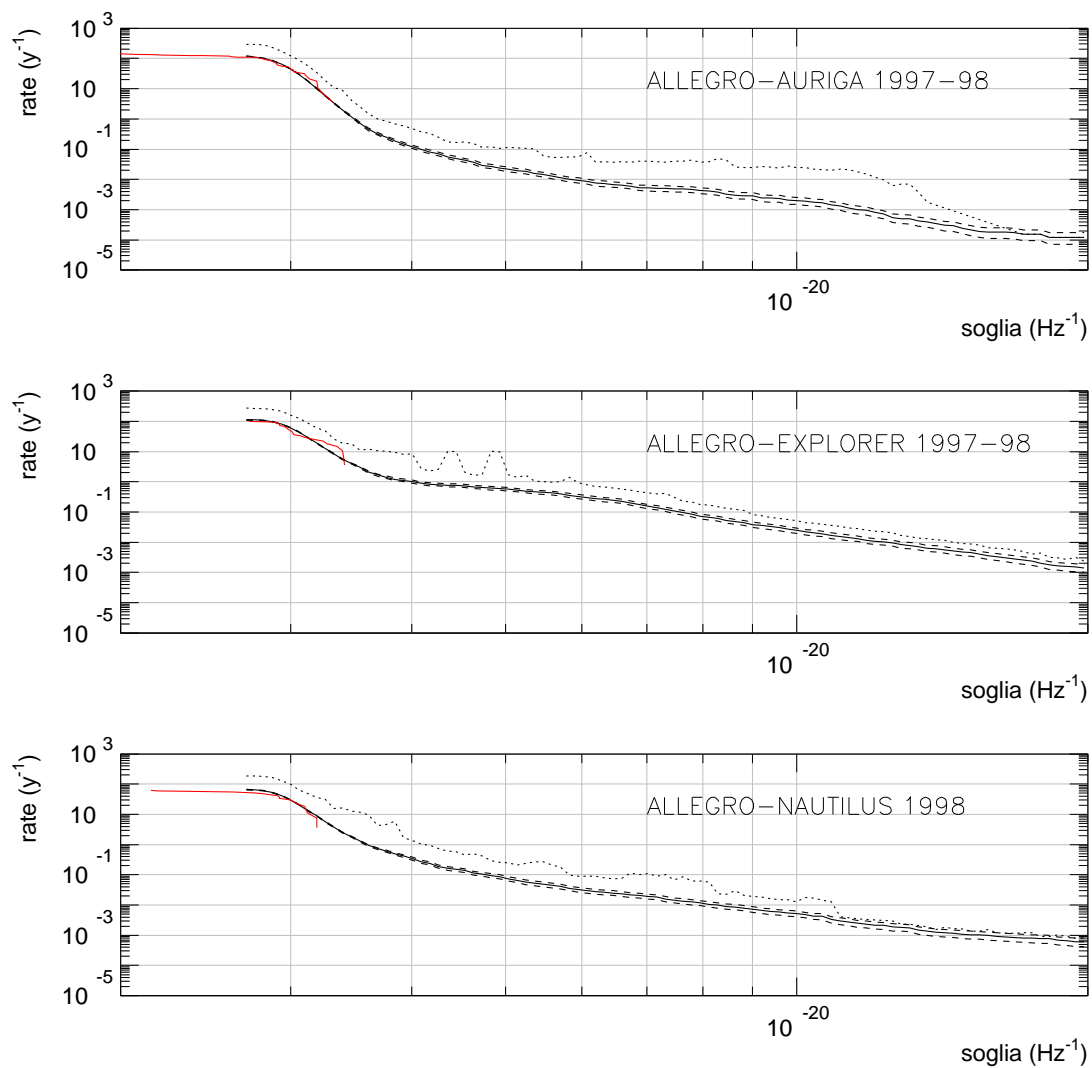
Inoltre non abbiamo trovato neanche una coincidenza multipla tra due eventi di un rivelatore con lo stesso evento di un altro rivelatore.

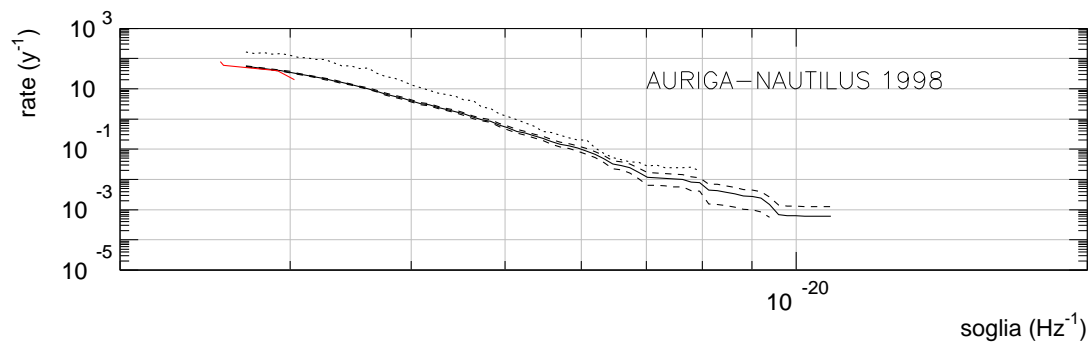
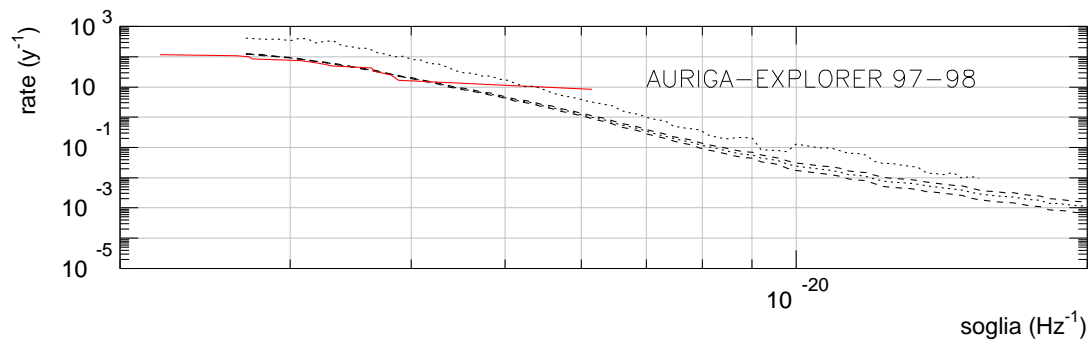
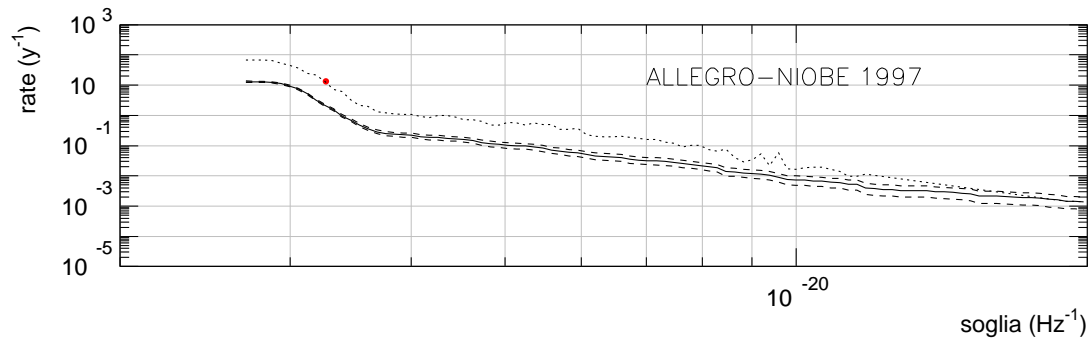
Abbiamo poi provato a ricercare le coincidenze fra le coppie di rivelatori variando δt , con δt crescente fino ad un valore massimo di 3s, trovando un buon accordo tra le coincidenze trovate e quelle attese anche a finestre maggiori (fig.5.1).

Inoltre le coincidenze trovate sono in accordo con la previsione teorica anche se selezioniamo gli eventi che hanno ampiezza H_0 maggiore di una soglia H_{thr} (fig.5.2). Da notare come le coincidenze trovate si distribuiscono così tutte a piccole ampiezze $H_0 < 7 \times 10^{-21}$ in quanto la densità di eventi è molto più grande tanto più si è vicini alle soglie dei rivelatori (fig.3.13). Usando dunque la tecnica delle medie mobili sugli shift illustrata nel par.4.2.2, abbiamo ricercato le possibili correlazioni fra i rate dei vari rivelatori; come si vede dalla fig.5.3 e le curve ottenute con gli shift seguono con buon accordo l'andamento delle curve ottenute per via teorica dalla 4.6; le oscillazioni della curva teorica sono dovute all'effetto combinato di variazioni del tempo di osservazione, T_{obs} , dovuto alla traslazione degli Start-stop combinato con la non stazionarietà dei rate dei singoli rivelatori. Essendo dunque le due previsioni del numero di coincidenze accidentali compatibili fra loro, allora, seguendo il ragionamento fatto nel par.4.2.2, possiamo concludere che i rate dei vari rivelatori non mostrano correlazioni durante l'intero periodo di osservazione su scale di tempi compresi tra qualche ora e qualche giorno.

Delle 112 coincidenze a due solo 54 non sono vetate da periodi di funzionamento di un terzo rivelatore; l'ampiezza massima di queste coincidenze è $1 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$ e quella minima è di $3.6 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$. Quindi abbiamo analizzato i periodi di osservazione a tre e a quattro rivelatori, 89.7giorni (tabella 3.5 e 3.6), non trovando nessuna coincidenza tripla e logicamente quadrupla a $\delta t = 0.5s$. come per le coincidenze a due rivelatori, abbiamo trovato il rate di

Figura 5.2: Rate di coincidenze tra due rivelatori n funzione di una soglia in ampiezza; la linea rossa rappresenta il rate delle coincidenze trovate selezionandole in base alla minima ampiezza degli eventi in coincidenza; la linea continua nera è il rate di accidentali atteso secondo la formula teorica eq.4.6; la linea tratteggiata indica la fluttuazione statistica del rate di coincidenze atteso calcolato come in par.4.2.4; la linea a punti blu rappresenta invece la fluttuazione del rate dovuto alla non stazionarietà dei rate dei singoli rivelatori (par.4.2.4).





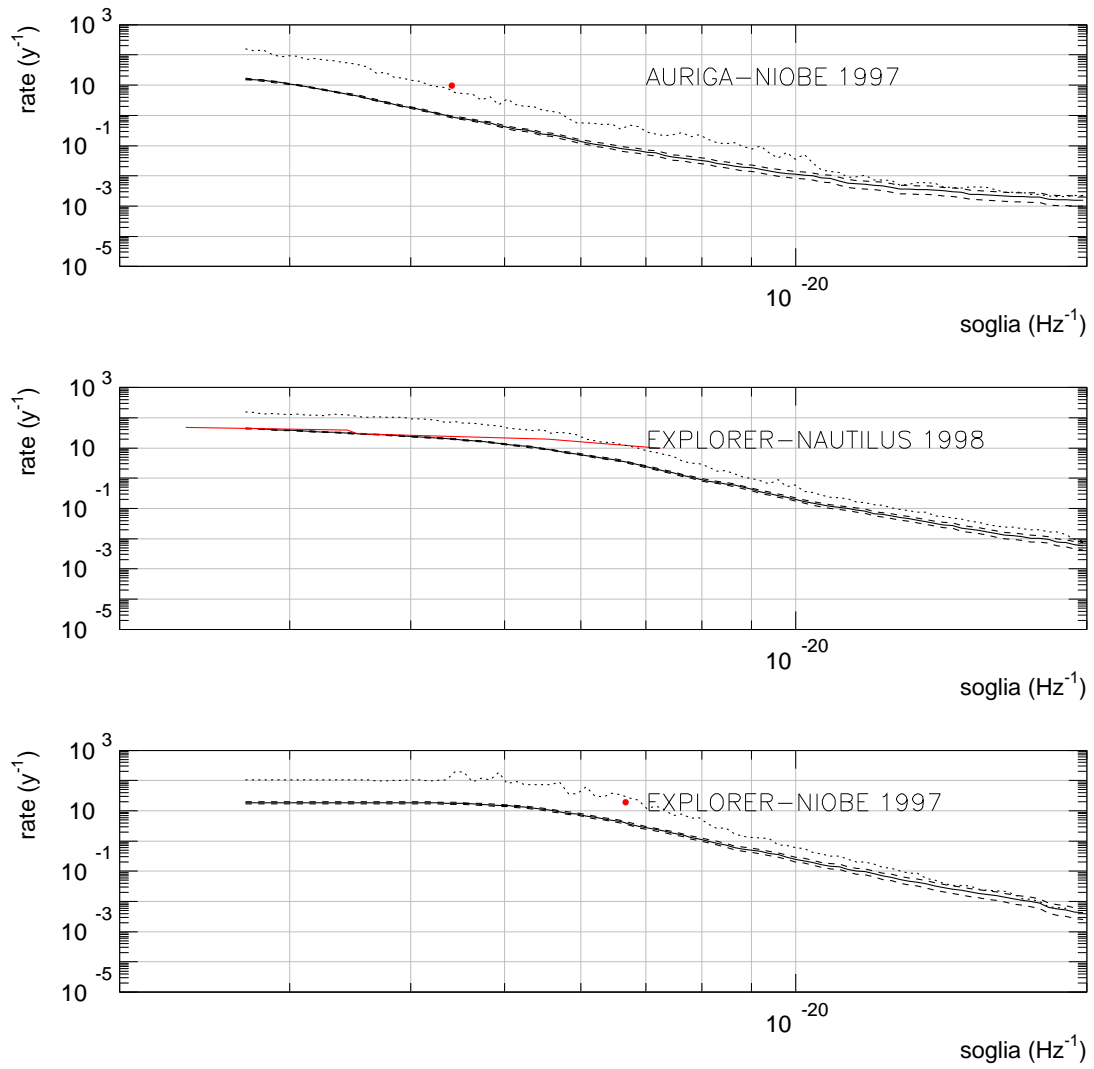


Figura 5.3: Confronto fra le previsioni teoriche ottenute tramite la formula teorica (eq.4.6) e la tecnica degli shift; la previsione degli shift sono delle medie mobili degli shift centrati in t che varia da 0 a 48 ore (par.4.2.2)

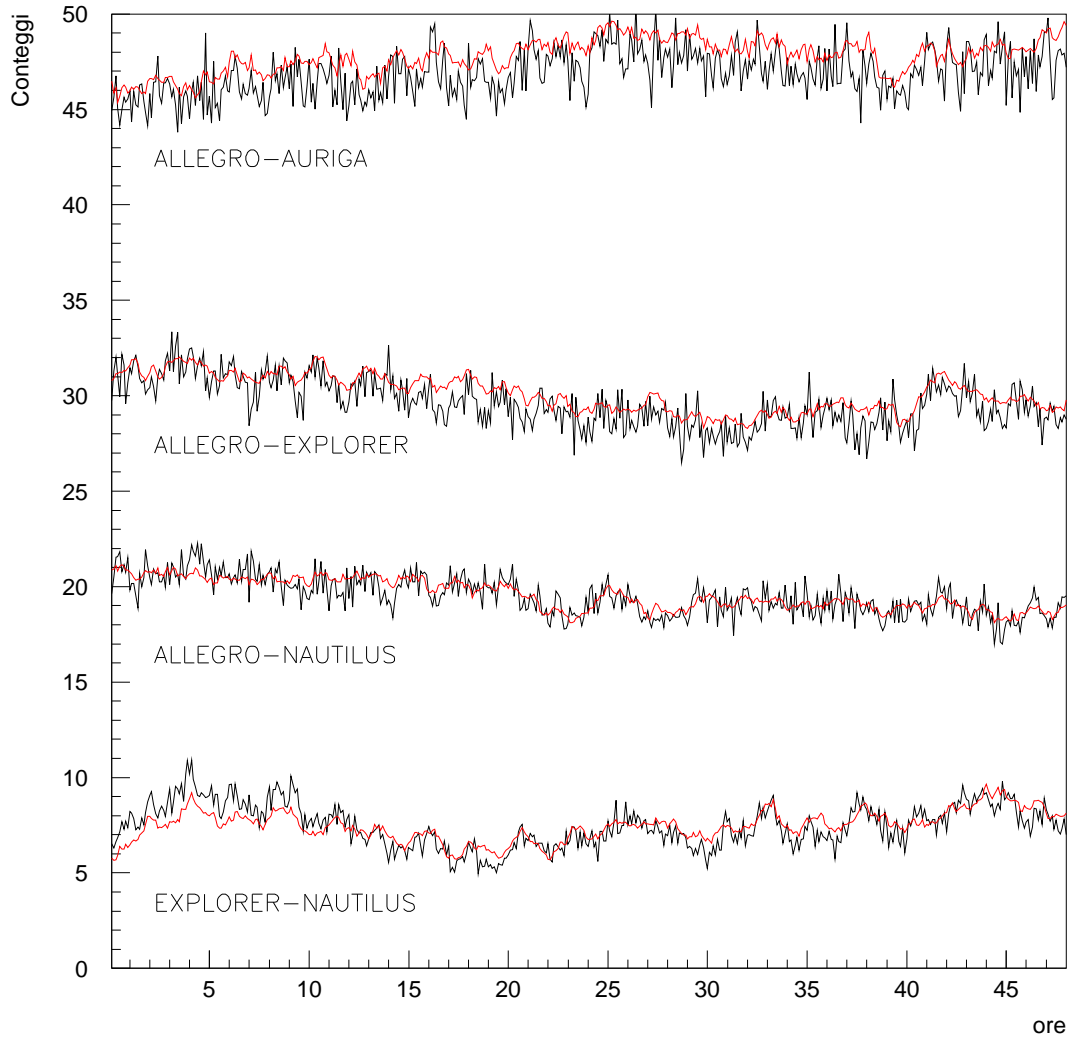
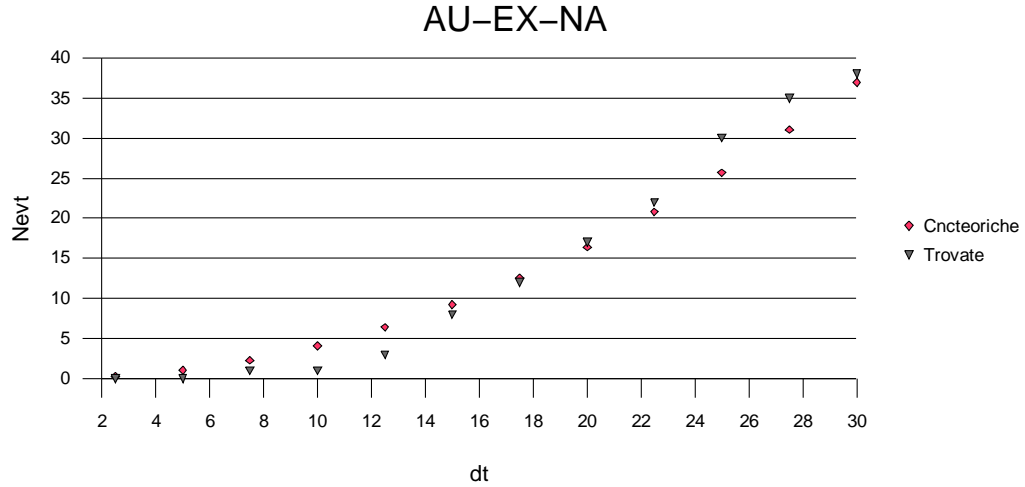


Figura 5.4: Numero di coincidenze tra AURIGA, EXPLORER e NAUTILUS in funzione di δt ; confrontiamo quindi il numero di coincidenze trovato con quello previsto teoricamente della eq. 4.6



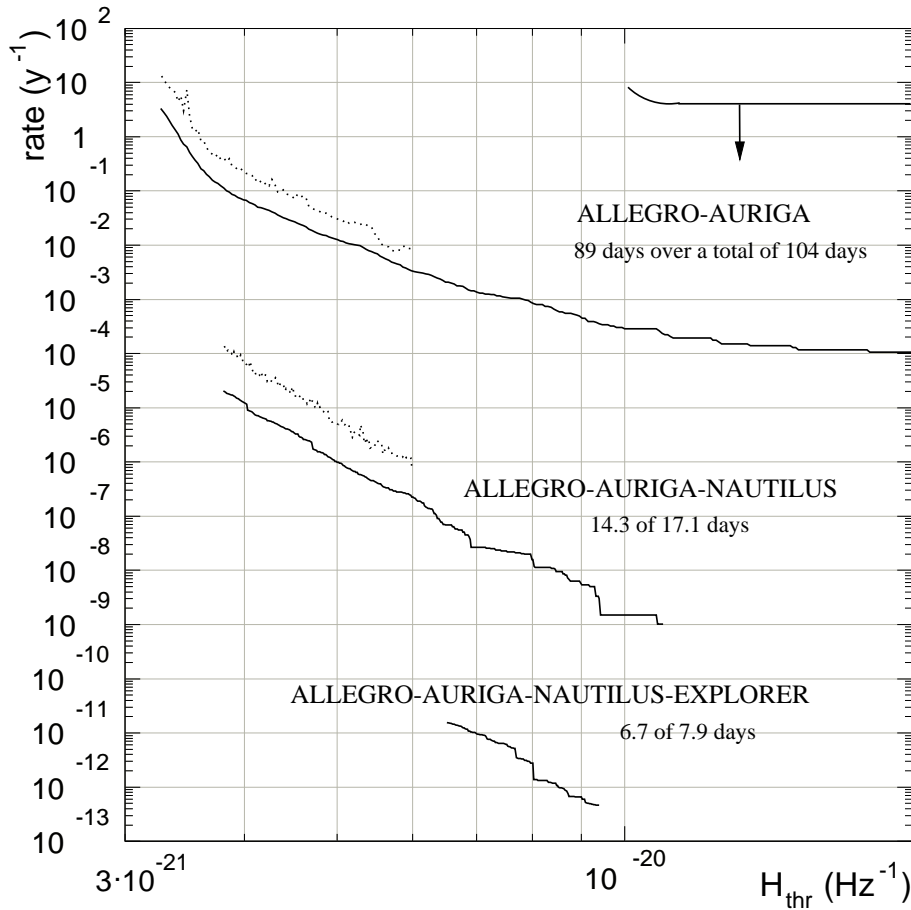
coincidenze tra tre rivelatori con un δt molto maggiore fino a 30s; presentiamo in fig.5.4 le triple trovate tra AURIGA, EXPLORER e NAUTILUS, in fig.5.6 presentiamo il rate atteso delle altre possibili combinazioni a tre rivelatori.

Le soglie dei rivelatori sono per lo 0.5 percentile di T_{obs} di $3 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$ per la tripla più sensibile (ALLEGRO-AURIGA-NAUTILUS) e di $5 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$ per le altre configurazioni; queste soglie corrispondono a o.g. impulsive (durata 1ms), emesse isotropicamente alla distanza del Centro Galattico (10kpc), ottimamente polarizzate e con energia rispettivamente di 0.04 e $0.11 M_{\odot} c^2$. In confronto il segnale atteso da una binaria di NS, coalescente alla distanza di 10kpc, ottimamente orientata e con masse $2 \times 1.4 M_{\odot} c^2$, sarebbe di $3 - 4 \times 10^{-21}$ alle frequenze di risonanza dei rivelatori dell'accordo IGEC.

5.2 Potenzialità osservatorio

Seguendo quindi la tecnica delineata nel par.4.2, presentiamo le potenzialità dell'osservatorio IGEC rispetto alla probabilità di falso allarme: nella fig.5.5 presentiamo dunque il rate di coincidenze accidentali per anno con ampiezza maggiore del valore in ascissa per ALLEGRO-AURIGA, ALLEGRO-AURIGA-NAUTILUS e ALLEGRO-AURIGA-NAUTILUS-EXPLORER calcolate dalla prestazioni dimostrate nel periodo sul periodo di osservazione in comune. Come spiegato nel cap.4.3 è necessario selezionare i periodi di buon funzionamento dei rivelatori in cui le soglie applicate nella ricerca eventi sono al di sotto di certi valori prefissati: considerando dunque il migliore 85% del periodo osservativo comune, allora risulta che le H_{thr} massime consentite rispettivamente per la coppia, la tripla e la quadrupla sono di 3.25, 3.8 e $6.5 \times 10^{-21} Hz^{-1}$; i periodi osservativi sono dunque rispettivamente di 89 giorni su 104 giorni, 14.3 su 17.1 giorni e 6.7 su 7.9 giorni. Per tutte le configurazioni rappresentiamo la curva

Figura 5.5: Stima del rate di coincidenze accidentali all'anno, $\lambda[anno^{-1}]$, rispetto ad una soglia $H_{thr}[Hz^{-1}]$ per due, tre e quattro rivelatori nel 1997-98. La linea nera rappresenta il rate medio atteso secondo la formula teorica (eq.4.6) per segnali con ampiezza $\geq H_{thr}$; la linea punteggiata rappresenta la fluttuazione del rate istantaneo accidentale, calcolato secondo la tecnica illustrata nel 4.2.4. Rappresentiamo (curva con freccia) anche il limite superiore sul rate calcolato al 95% di confidenza per ampiezza $H_0 \gtrsim 10^{-20}(Hz^{-1})$, che è $\geq 4y^{-1}$.



teorica, e solo per la doppia e la tripla anche la curva dovuta alla dispersione del rate “istantaneo” di coincidenze attese, causata dalla non stazionarietà dei rate dei singoli rivelatori; per la quadrupla non abbiamo abbastanza statistica per calcolarci la fluttuazione dovuta alla non stazionarietà. Per il metodo di calcolo vedi par.4.2.4.

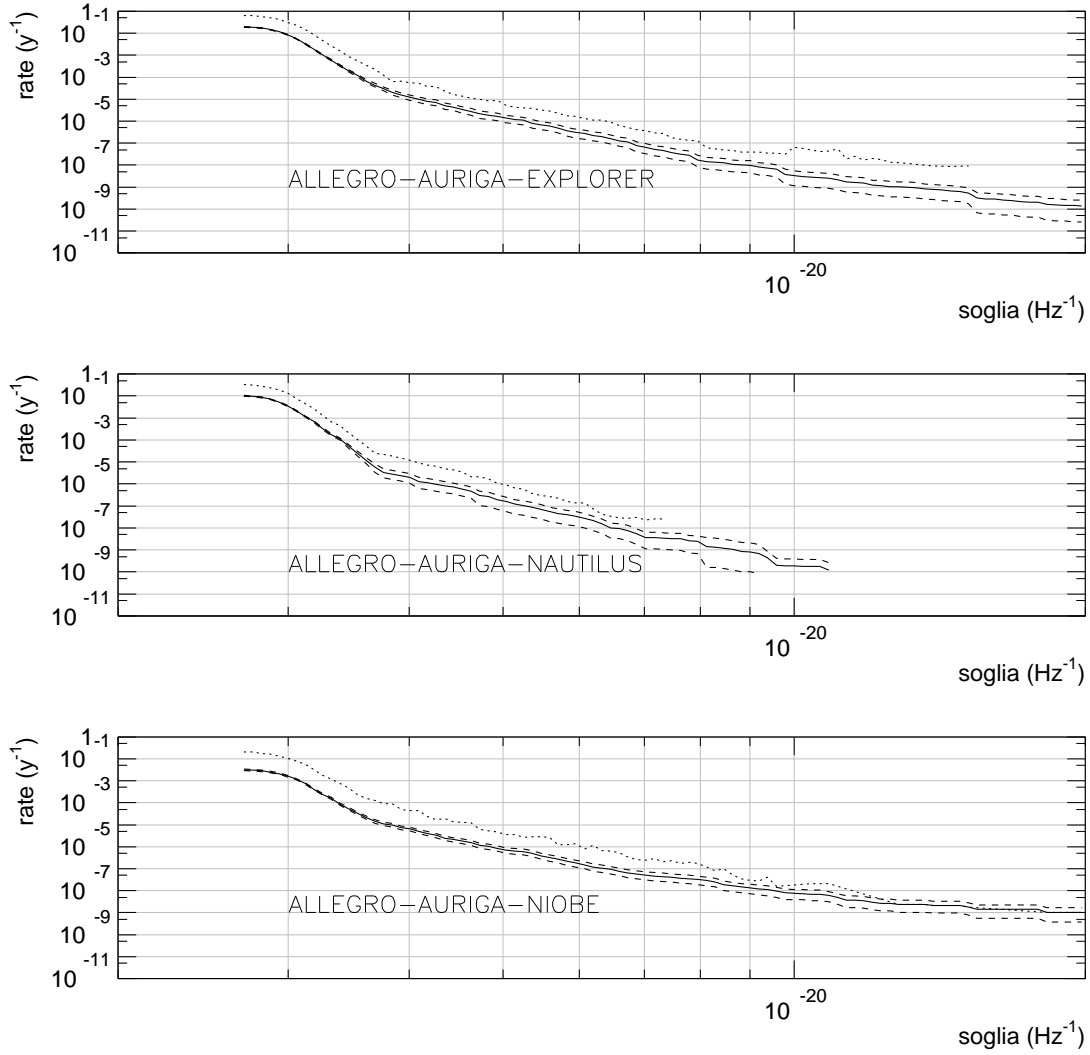
Nella fig.5.5 rappresentiamo anche la fluttuazione statistica dei rate di coincidenze accidentali, cioè quella che si avrebbe anche se i rate fossero costanti; dalla fig.5.5 si nota dunque che la fluttuazione statistica è molto inferiore rispetto a quella dovuta alla non stazionarietà dei rate dei singoli rivelatori. Riportiamo in fig.5.2 e 5.6 le altre possibili combinazioni di due, tre e quattro rivelatori.

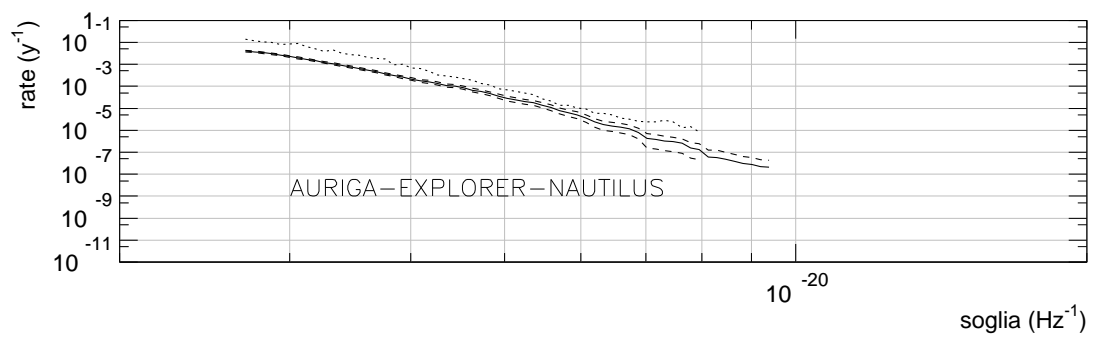
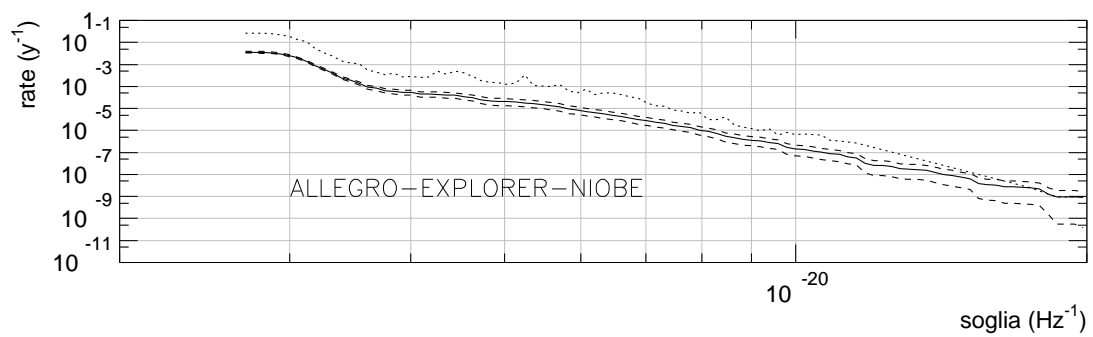
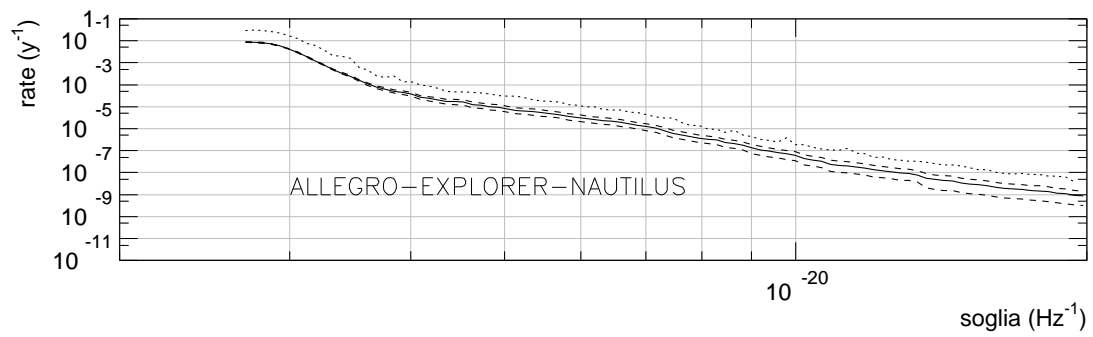
Possiamo concludere che il rate di coincidenze attese con due rivelatori è molto alto a meno che non si alzi la soglia H_{thr} tanto al di sopra della soglia del rivelatore, H_{det} ; il rate di coincidenze invece fra tre o quattro rivelatori è così basso che perfino con $H_{thr} \sim H_{det}$ è estremamente

improbabile che ci sia una coincidenza dovuta al caso: potremmo avere infatti al massimo 1 falso allarme ogni 10^4 e 10^6 anni di osservazione con soglia $H_{thr} \approx 4 \times 10^{-21} Hz^{-1}$ e cade rapidamente all'aumentare della soglia H_{thr} (fig.5.5). Il conoscere il rate di falsi allarmi in funzione di una soglia in ampiezza (Hz^{-1}) ha dunque una doppia importanza per noi:

- Stabilisce la significatività statistica di eventuali candidati alla rivelazione di $H_0 \geq H_{thr}$; per ora la sensibilità raggiunta in ampiezza spettrale H_0 è marginalmente soddisfacente solo per le più potenti sorgenti galattiche (cap.2).
- Stabilisce il rumore di fondo in termini di rate rivelabile di sorgenti di o.g; in questo siamo già soddisfacenti, in quanto siamo limitati solo dall'effettivo tempo di osservazione a tre rivelatori.

Figura 5.6: Come in fig.5.2 presentiamo il rate di coincidenze atteso tra tre e quattro rivelatori; naturalmente non avendo trovato coincidenze a tre non possiamo disegnare la linea rossa della fig.5.2





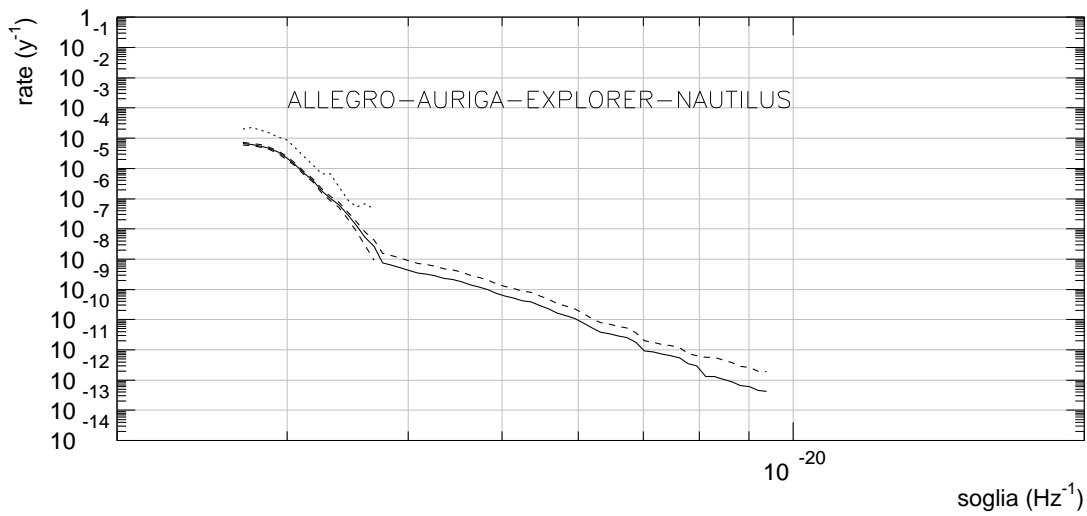
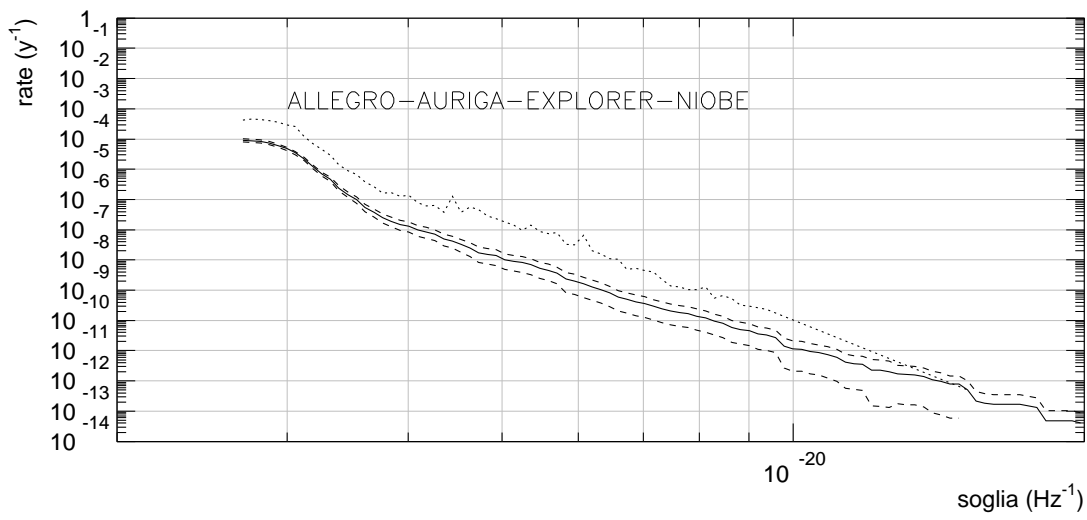
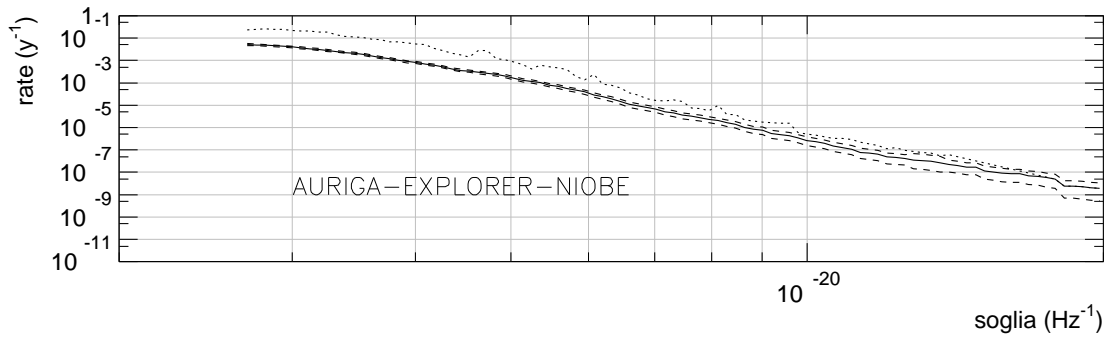
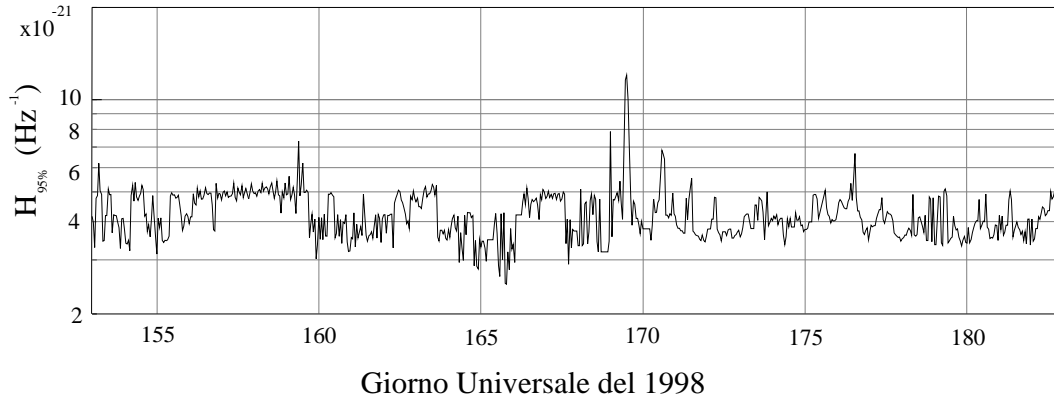
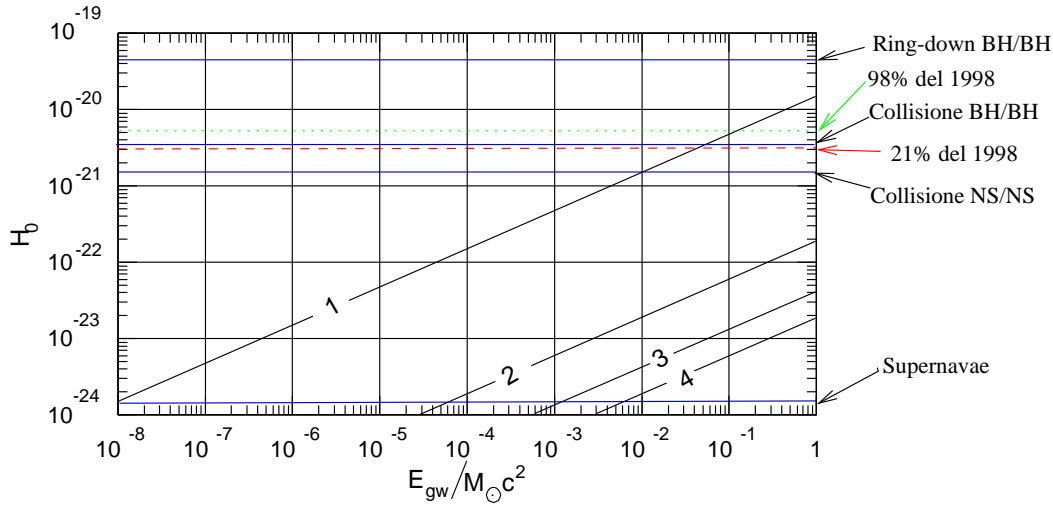


Figura 5.7: Limite superiore in ampiezza per ogni ora di osservazione per due settimane campione del Giugno 1998

5.3 Limiti superiori in ampiezza

Presentiamo dunque un esempio di come IGEC possa imporre un limite superiore sull'ampiezza spettrale H_0 di una o.g. dato un preciso intervallo di tempo ed una direzione nello spazio in cui cercare il segnale; altre rivelazioni astrofisiche infatti (raggi gamma, neutrini, ecc), potrebbero rivelare l'esistenza di probabili sorgenti di o.g come collisione di NS/NS, supernovae o gamma ray burst, (cap.2); poichè le o.g. potrebbero essere temporalmente sfasate rispetto a quest'altri segnali rilevati sarebbe interessante poter dare un limite in ampiezza entro un intervallo di tempo, che noi fissiamo, a titolo di esempio, di 1 *ora*. Calcoliamo questo limite in ampiezza al 95% di confidenza (par.4.4.1) e scegliamo come direzione di provenienza dell'onda gravitazionale la direzione del Centro Galattico; nella fig.5.7 rappresentiamo dunque tale limite superiore calcolato per alcune settimane del Giugno 1998 in cui c'erano fino a quattro rivelatori operanti simultaneamente. Per il 98% e il 21% del 1998 IGEC può porre un limite superiore in ampiezza di rispettivamente $H_{og} = 6$ e $4 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$. Per una sorgente al Centro Galattico, che emette isotropicamente o.g. impulsive, questo limite superiore corrisponde a circa 0.16 e 0.07 $M_{\odot}c^2$ convertite in o.g. (fig.5.8) Con queste sensibilità IGEC ha osservato il Centro Galattico per rispettivamente il 44% e il 7.5% del 1998.

Figura 5.8: Come la fig.2.10 in cui abbiamo indicato i limiti superiori calcolati nel par.5.3 con i dati scambiati nel 1998: la linea tratteggiata rossa corrisponde a $H_{og} = 4 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$ e quella punteggiata $6 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$; per una sorgente al Centro Galattico (linea n.1), che emette isotropicamente o.g. impulsive, questi limiti superiori corrispondono rispettivamente a circa 0.16 e $0.07 M_{\odot}c^2$ convertite in o.g.



5.4 Limiti superiori sul rate

Nella fig.5.5 rappresentiamo quindi il limite superiore sul rate calcolato seguendo la tecnica illustrata nel 4.4.2, supponendo che le sorgenti siano distribuite isotropicamente nel cielo. Molto facilmente possiamo dare un limite sul rate per ampiezze $H_0 \gtrsim 10^{-20} (Hz^{-1})$: in tal caso infatti sia l'efficienza di rivelazione dovuta alla funzione di risposta $\epsilon(H_0/H_{thr})$ che quello dovuta al taglio in soglia degli eventi e del rumore del rivelatore $\epsilon_{noise}(H_0, H_{thr}, \sigma_H)$ si possono considerare unitari e quindi il limite superiore è dato semplicemente sul rate da $3/T_{obs}$ con $T_{obs} = 260d$ il tempo di osservazione ad almeno due rivelatori. A soglie così alte infatti il rate di coincidenze attese a due rivelatori è estremamente basso (fig.5.5) e non ci sono coincidenze $n_c = 0$ (fig.5.2). Dunque per $H_0 \gtrsim 10^{-20} (Hz^{-1})$ il limite superiore al rate è al 95% di confidenza $\geq 4y^{-1}$. Se voglio conoscere tale limite per H_0 più basse, posso abbassare le soglie massime della ricerca eventi ponendole tra 4 e 6.5×10^{-20} , perdendo meno del 10% del tempo di osservazione; a tali ampiezza tuttavia l' $\epsilon(H_0/H_{thr})$ non è più unitaria e vale circa 0.4 e dunque il limite superiore sul rate risulta il doppio di quello dato precedentemente, $\sim 8y^{-1}$. Rappresentiamo i due limiti superiori calcolati in fig.5.5.

Conclusioni

Durante il lavoro di questa tesi la collaborazione IGEC è diventata operativa a tutti gli effetti e si è iniziata l'analisi sistematica delle osservazioni dei rivelatori 1997-98. Solo in un primo periodo iniziale il lavoro svolto è stato di tipo compilativo: inizialmente si è voluto infatti dimostrare come i segnali provenienti da alcune delle più importanti sorgenti di onde gravitazionali (o.g.) possano essere viste da una rivelatore a barra risonante come degli impulsi di frequenza $\sim 1kHz$ e di durata $\sim 1ms$; ci si è poi dedicati allo sviluppo dell'analisi dei dati scambiati sotto protocollo IGEC. Le due fasi principali di questa ricerca sono state: i) lo studio delle proprietà dei dati scambiati dai singoli rivelatori di IGEC e ii) lo studio delle osservazioni congiunte effettuate dalla rete di rivelatori.

i) Il primo passo del lavoro di tesi è stato la verifica della consistenza e la costruzione del data base delle osservazioni dei singoli rivelatori, utile soprattutto per individuare errori di implementazione del protocollo. Sono state sistematicamente analizzate le proprietà statistiche dei dati scambiati (detti eventi), stimolando indirettamente un processo di convergenza fra le analisi dati dei diversi rivelatori (per esempio sulle tecniche di selezione eventi): è stata provata la casualità dei processi generanti le liste di eventi scambiati che si distribuiscono poissonianamente nel tempo ed sono state definite le prestazioni dell'osservatorio in termini di sensibilità e di efficienza di rivelazione di o.g. È stato perciò necessario sviluppare ed implementare tutte le tecniche d'analisi dati necessarie per raggiungere gli scopi appena descritti, riuscendo a realizzare infine una vasta libreria di moduli-C. Tutti gli strumenti informatici realizzati sono stati accuratamente testati con l'utilizzo di simulazioni numeriche sempre sviluppate nell'ambito di questo periodo di tesi.

ii) Si è dunque iniziato lo studio delle osservazioni congiunte effettuate dalla rete di rivelatori: è stata verificata per la prima volta la scorrelazione tra i rate di eventi dei diversi rivelatori; è stato così possibile semplificare di molto il calcolo teorico del numero di coincidenze casuali fra le liste eventi dei rivelatori di IGEC. Dopo aver quindi verificato con simulazioni numeriche l'effettiva validità di tale previsione teorica, sono stati calcolati i falsi allarmi e le potenzialità dell'osservatorio dell'accordo IGEC: si è così visto che se tre o quattro rivelatori sono operativi simultaneamente si ha un falso allarme rispettivamente ogni 10^4 e 10^6 anni per ampiezze $H_0 \geq 4 \times 10^{-21}(Hz^{-1})$; inoltre se si considerano solo gli eventi con un ampiezza $H_0 \geq 5 \times 10^{-21}(Hz^{-21})$ anche le coincidenze a due rivelatori diventano molto improbabili:

circa un falso allarme ogni circa 50 anni.

Dopo aver sviluppato e verificato le tecniche d'analisi dati necessarie, sono stati dunque analizzati i periodi di osservazione comune alla ricerca di possibili coincidenze. Nel periodo di circa 260 giorni con almeno due rivelatori operativi abbiamo trovato 112 coincidenze che hanno una probabilità molto alta (≥ 0.95) di essere dovute solo al caso; infatti sia la stima teorica ed quella empirica degli shift prevedono entrambe circa 130 falsi allarmi. Nel periodo di circa 90 giorni del 1997-98 in cui funzionavano simultaneamente almeno tre rivelatori non abbiamo trovato coincidenze. In conclusione la nostra ricerca di eventuali candidati eventi gravitazionali ha dato esito nullo.

Infine sono stati posti dei limiti superiori sul rate e sull'ampiezza delle o.g giunte alla Terra nei periodi di osservazione del 1997-98: per eventi gravitazionali aventi al rivelatore un'ampiezza $H_0 \gtrsim 10^{-20} (Hz^{-1})$ il limite superiore al rate è di $\geq 4y^{-1}$ al 95% di confidenza; inoltre è stato possibile porre un limite superiore in ampiezza di rispettivamente 6 e $4 \times 10^{-21} (Hz^{-1})$ durante circa il 98% e il 21% del 1998 che nel caso in cui si considerino onde gravitazionali impulsive al kHz emesse alla distanza del Centro Galattico (10kpc), corrispondono ad un energia emessa in o.g. rispettivamente di 0.16 e $0.07 M_{\odot} c^2$.

Bibliografia

- [1] J.Weber. *Phys.Rev*, (117):306, 1960.
- [2] E.Mauceli et al. *Phys. rev*, D54:1264, 1996.
- [3] G.A.Prodi et al. In *Proc. of the 2nd E.Amaldi International Meeting on gravitational wave Experiment*. CERN, 1997.
- [4] P.Astone et al. *Phys. Rev.*, D47:362, 1993.
- [5] P.Astone et al. *Astrop.Phys.*, 7:231, 1997.
- [6] D.G.Blair et al. *Phys. Rev. Letter*, 74:1908, 1995.
- [7] Sito web di IGEC al link <http://igec.lnl.infn.it/>.
- [8] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 1973.
- [9] F.de Felice. *Relativity on curved manifold*. Cambridge university Press, 1990.
- [10] E.Flanagan C.Cutler. Gravitational waves from merging compact binaries. *Phys.Rev.D*, 49:2658, 1994.
- [11] M.Ruffert e H.T. Janka. Colliding neutron stars — gravitational waves, neutrino emission, and gamma-ray bursts. 1998. astro-ph./9804132.
- [12] K.Thorne. Gravitational waves. In E.W.Kolb and R.Peccei, editors, *Proceedings of the Snowmass 95 Summer Study on Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology*. World Scientific, Singapore. gr-qc/9506086.
- [13] Eanna E. Flanagan e Scott A. Hughes. Measuring gravitational waves from binary black hole coalescences: I. signal to noise for inspiral, merger and ringdown. 1997. gr-qc/9701039 v2.
- [14] H.A.Bethe. Supernovae mechanism.
- [15] Muller. *Relativistic Gravitation & Gravitational Radiation*. Number 273. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- [16] V.Trimble. *Rev.Mod.Phys.*, 54:1183, 1982.
- [17] Zwerger e Muller. *Astron. Astrophys.*, 1996.
- [18] E.Flanagan and S.Hughes. *Phis. Rev.D*, 1998.
- [19] J. A. de Freitas Pacheco. Do soft gamma repeaters emit gravitational waves? 1998. astro-ph/9805321.
- [20] L.Lindblom. *Ap. J*, (438):265, 1995.
- [21] N.Stergioulas L.Andersson, K.Kokkotas. On the relevance of the r-mode instability for accreting neutron stars and white dwarfs. astro-ph/9806089.
- [22] M.Cerdonio et al. Cryogenic resonant detectors of gravitational waves: current operationand prospect.
- [23] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Mc Graw Hill, 3rd edition, 1991.
- [24] E.Amaldi et al. First gravity wave coincidence experiment between resonant cryogenic detectors: Luisian-rome-stanford. *Astron. Astrophys*, (216):325, 1989.
- [25] A. Ortolan. *Realizzazione ed ottimizzazione di un osservatorio di onde gravitazionali*. PhD thesis, Universita degli Studi di Ferrara, 1991.