



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN FISICA

**MODELLO TEORICO PER ESPLOSIONI
COSMICHE DI RAGGI GAMMA (GRBs)
COME EMETTITORI DI ONDE
GRAVITAZIONALI**

Relatore:

Prof. Pierluigi Fortini

Correlatore:

Dott. Antonello Ortolan

Tesi di laurea di:

Silvia Poggi

Anno Accademico 2000/2001

INTRODUZIONE

Uno dei fenomeni più misteriosi ed affascinanti sui quali si interroga l'astrofisica moderna è, senza dubbio, il fenomeno dei gamma-ray bursts (GRBs): flash di radiazione elettromagnetica di grandissima intensità, che fanno di questo evento il più luminoso oggi conosciuto.

Malgrado numerosi satelliti sondino lo spazio alla ricerca di dati e informazioni circa i GRBs, ancora non è stato possibile individuarne esattamente l'origine. Tuttavia, numerosi modelli sono stati sviluppati per spiegare questo fenomeno. Il panorama degli scenari proposti, fino a poco tempo fa, presentava esclusivamente modelli stazionari, in grado di produrre notevoli quantitativi di energia, ma non sufficienti a giustificare la luminosità raggiunta dai GRBs.

Intendiamo qui porre in primo piano un nuovo tipo di modello (il modello buco nero-toro, sviluppato dal fisico M. H. P. M. van Putten e collaboratori negli ultimi due anni e illustrato da numerosi articoli in letteratura). Il modello propone come "motore" interno del fenomeno-GRB uno scenario particolare, composto da un buco nero in rotazione su sè stesso, da materiale barionico in sospensione attorno ad esso in una struttura toroidale, e da un intenso campo magnetico che lega i due corpi, innescando i fenomeni fisici che porteranno ai diversi tipi di emissione.

Il modello attribuisce l'origine del sistema alla coalescenza di una coppia di stelle binarie: probabilmente un buco nero ed una stella di neutroni. Quando, per effetto dell'irraggiamento di onde gravitazionali, la stella di neutroni si avvicinerà all'ultima orbita stabile del buco nero, subirà l'effetto delle potenti forze di marea di quest'ultimo, che la "disgregheranno" ridistribuendola sottoforma di struttura toroidale. In quello che rimane della stella di neutroni permarrà, oltre che parte della massa, parte del suo momento angolare (rendendola quindi rotante), nonché il residuo del campo magnetico. Il buco nero si troverà, pertanto, avvolto dalla

magnetosfera supportata dal toro e, a causa della sua rotazione, tenderà a caricarsi fino a raggiungere un certo momento magnetico d'equilibrio. Per effetto del frame-dragging in presenza del campo magnetico, esso alimenterà un flusso collimato di leptoni (lungo l'asse di rotazione del buco nero) che andrà ad innescare la nascita dei GRBs tramite il modello "fireball". Il toro, invece, risulterà coinvolto in due tipi di processi, riconducibili alla stessa natura. In analogia alle pulsar, esso riceverà, dalla sua faccia più interna, un flusso di energia dal buco nero (che perde momento angolare tramite la sua rotazione, secondo la termodinamica classica dei buchi neri), mentre subirà, nella sua faccia esterna, l'effetto dei venti magnetici e una perdita d'energia sottoforma di radiazioni. Le radiazioni previste per questo corpo (che verosimilmente assumeremo non perfettamente assi-simmetrico) sono sostanzialmente di tipo gravitazionale (accompagnate da un'emissione elettromagnetica, minore di due ordini di grandezza, e, quando la temperatura lo consente, da un'emissione di neutrini).

Mentre la perdita di momento angolare dal buco nero tenderà ad "alimentare" il toro, i venti magnetici e l'emissione radiativa tenderanno a "consumarlo". Se assumiamo che le due famiglie di fenomeni antagonisti si equilibrino quasi esattamente, verrà impedito il rapido collasso del toro (stato di "iper-accrescimento" del buco nero) raggiungendo lo stato di "crescita sospesa": il toro rimane in rotazione senza collassare per diversi secondi (tempo lunghissimo in confronto ai pochi millesimi di secondo impiegati da una stella di neutroni della stessa massa per collassare), consentendo in questo modo al buco nero di continuare ad emettere leptoni lungo il suo asse per lo stesso periodo. Durante la "crescita sospesa", pertanto, è previsto il verificarsi contemporaneo di un GRB lungo (dal buco nero) e di una altrettanto lunga emissione di onde gravitazionali (dal toro). I due fenomeni, imponendo l'equilibrio fra i processi "costruttivi" e "distruttivi" del toro, saranno riconducibili (come verrà dimostrato) allo stesso ordine di grandezza. Questo modello prevede quindi, con il verificarsi della "crescita sospesa", una

radiazione gravitazionale della portata di circa 10^{53} ergs: la più consistente emissione gravitazionale mai prevista da un modello astrofisico.

Quando non si verificano le condizioni per stabilire l'equilibrio, assisteremo ad un rapido collasso del toro e, contemporaneamente, ad un'emissione breve di leptoni a minor energia dal buco nero (GRB breve).

Il modello proposto, verrà illustrato, in questa tesi, preceduto da un capitolo introduttivo sui principi della Relatività Generale; in particolare si perverrà (capitolo 1 ed appendici A e B) alle relazioni che regolano le luminosità in onde elettromagnetiche e gravitazionali a partire dalle derivate dei momenti di dipolo magnetico e d'inerzia.

Nel secondo capitolo verrà illustrata la fenomenologia più classica legata ai GRBs, sottolineando in particolare i molti aspetti giustificabili dal nostro modello.

Il terzo capitolo, dopo un paragrafo che introduce le proprietà e la metrica dei buchi neri, illustra l'origine del sistema buco nero-toro, presenta la complessa struttura della magnetosfera coinvolta e propone brevemente il modello come emettitore di GRBs, rifacendosi al capitolo precedente per un riscontro diretto del modello teorico con le osservazioni sperimentali.

Il quarto capitolo, infine, che presenta il modello dal punto di vista dell'emissione gravitazionale, si può suddividere in due parti: nei primi tre paragrafi vengono dedotte, da un punto di vista esclusivamente teorico, tutte le conseguenze della "sospensione di crescita" del buco nero, mentre, nei paragrafi successivi, le stesse conclusioni vengono sfruttate per pervenire alla forma tipica del segnale prodotto. Questi risultati, come verrà dimostrato, risulteranno compatibili con il segnale-limite rilevabile da rivelatori di onde gravitazionali quali AURIGA a distanze di alcune decine di Mpc.

CAPITOLO 1

CONCETTI BASE DELLA RELATIVITA' GENERALE

1.1 PRINCIPIO DI EQUIVALENZA E SUE CONSEGUENZE

Una delle proprietà più caratteristiche del campo gravitazionale è quella che vede tutti i corpi soggetti alla medesima accelerazione, indipendentemente dalla loro massa. Da questo principio, noto con il nome di principio di equivalenza, discendono numerose ed importanti conseguenze:

- Innanzitutto, esso comporta il fatto che i raggi luminosi curvino la loro traiettoria qualora attraversino un campo gravitazionale.
- Poiché, in Relatività, la deformazione del tragitto dei raggi luminosi si interpreta come una modificazione dello spazio-tempo, la presenza di massa (quindi di campo gravitazionale) ad incurvare la traiettoria della luce, corrisponderà a trasformare lo spazio-tempo di Minkowski (vettoriale e piano) in una varietà dotata di curvatura.
- Se, per quanto sopra, descriviamo lo spazio-tempo con una varietà reimanniana, noteremo che, localmente, le componenti della metrica diventano quelle di Minkowski e i simboli di Christoffel si annullano.
- Sempre nel presupposto di considerare una metrica reimanniana, le leggi della fisica si dovranno esprimere in forma tensoriale generale, cioè in una forma

indipendente dal sistema di coordinate. Per ottenere questo requisito la derivazione ordinaria impiegata nella Relatività Speciale dovrà essere sostituita dalla derivazione covariante, secondo un principio conosciuto come principio di covarianza generale.

- L'incurvamento dei raggi luminosi (privi di massa) per opera del campo gravitazionale ci consente di affermare che quest'ultimo agisce (e può venir prodotto) non soltanto dalla massa ma, più in generale, dal tensore energia-impulso dei corpi.
- L'ultimo postulato che porremo è che massa inerziale e massa gravitazionale di un corpo siano uguali, fatto verificato anche sperimentalmente.

1.2 LA TEORIA LINEARIZZATA DELLA GRAVITA'

Tenendo presenti le considerazioni del paragrafo precedente, formuliamo una teoria linearizzata della Relatività. Come abbiamo detto, la curvatura dello spazio-tempo è prodotta dal tensore energia-impulso T^{mn} (*); pertanto, esso darà luogo ad equazioni del moto della forma:

$$(\text{tensore che genera la curvatura}) = kT^{mn} \quad (1)$$

Affinché la (1) risulti soddisfatta, il tensore di sinistra dovrà, analogamente al tensore energia-impulso, essere simmetrico ed avere traccia nulla. Poiché conosciamo soltanto due tensori che rispettino tali proprietà (il tensore metrico g^{mn} , e il tensore di Einstein $G^{mn} = R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R$, dove R^{mn} è il tensore di Ricci), li includeremo entrambi nella (1):

$$G^{mn} + \Lambda g^{mn} = kT^{mn} \quad (2)$$

(*) Con le lettere greche intenderemo, da qui in avanti, una variazione degli indici su tutte e quattro le componenti spazio-temporali.

dove Λ e k sono due costanti che determineremo imponendo di ottenere dalla (2) la normale teoria newtoniana, nelle condizioni nelle quali essa si verifica. Le equazioni del moto classiche, perfettamente in accordo con i risultati sperimentali, discendono infatti dalla (2) imponendo, innanzitutto, il vincolo di campo gravitazionale debole (non si è mai misurata una sensibile deviazione dalle proprietà geometriche euclidee, pertanto da una metrica a curvatura nulla).

Si avrà un “campo debole” ogniqualvolta lo spazio-tempo in considerazione è una varietà quasi piatta (si veda, ad esempio Misner, Thorne e Wheeler, 1973), cioè quando il suo tensore metrico g_{mn} differirà da quello della Relatività Speciale (il tensore di Minkowski \mathbf{h}_{mn}) per un tensore infinitesimo h_{mn} :

$$g_{mn} = \mathbf{h}_{mn} + h_{mn} \quad |h_{mn}| \ll 1 \quad (3)$$

Il formalismo appena introdotto è noto come “teoria linearizzata della Relatività Generale”. Coerentemente, in quest’approssimazione, trascureremo tutte le potenze di h_{mn} di ordine maggiore o uguale a due. Avremo quindi che, imponendo

$$g^{mn} g_{ns} = \mathbf{d}_s^m$$

il tensore metrico, in componenti controvarianti, si scriverà come:

$$g^{mn} = \mathbf{h}^{mn} - h^{mn} \quad (4)$$

Definita in questo modo la metrica, i coefficienti di connessione (o simboli di Christoffel) si trasformeranno in questo modo (si veda, ad esempio, Landau e Lifšic, 1964):

$$\begin{aligned} \Gamma^m_{ab} &= \frac{1}{2} g^{mn} (\partial_b g_{na} + \partial_a g_{nb} - \partial_n g_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{h}^{mn} - h^{mn}) (\partial_b (\mathbf{h}_{na} + h_{na}) + \partial_a (\mathbf{h}_{nb} + h_{nb}) - \partial_n (\mathbf{h}_{ab} + h_{ab})) \end{aligned}$$

Avremo, perciò:

$$\Gamma^m_{ab} = \frac{1}{2} \mathbf{h}^{mn} (\partial_b h_{na} + \partial_a h_{nb} - \partial_n h_{ab})$$

(dove, nell’ultimo passaggio, abbiamo introdotto: $h_a^m = \mathbf{h}^{mn} h_{an}$).

Definendo ora la traccia di h_{mm} in questo modo:

$$h \equiv h^a{}_a = \mathbf{h}^{ab} h_{ab} \quad (5)$$

possiamo scrivere le componenti del tensore di Ricci, nell'approssimazione linearizzata, come:

$$\begin{aligned} R_{mm} &= \partial_b \Gamma^b{}_{mm} - \partial_n \Gamma^b{}_{mb} \\ R_{mm} &= \frac{1}{2} \partial_b (\partial_n h^b{}_m + \partial_m h^b{}_n - \partial^b h_{mm}) - \frac{1}{2} \partial_n (\partial_b h^b{}_m + \partial_m h^b{}_b - \partial^b h_{mb}) \end{aligned}$$

Esplicitando le diverse componenti, si avrà:

$$\begin{aligned} R_{mm} &= \frac{1}{2} \partial_b \partial_n h^b{}_m + \frac{1}{2} \partial_b \partial_m h^b{}_n - \frac{1}{2} \partial_b \partial^b h_{mm} - \frac{1}{2} \partial_n \partial_b h^b{}_m - \frac{1}{2} \partial_n \partial_m h^b{}_b + \frac{1}{2} \partial_n \partial^b h_{mb} \\ &= \frac{1}{2} \partial_b \partial_m h^b{}_n - \frac{1}{2} \partial_b \partial^b h_{mm} - \frac{1}{2} \partial_n \partial_m h^b{}_b + \frac{1}{2} \partial_n \partial^b h_{mb} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_b \partial^b h_{mm} - \frac{1}{2} \left[\partial_b \partial_n \left(\frac{1}{2} \mathbf{h}_m{}^b h - h_m{}^b \right) + \partial_b \partial_m \left(\frac{1}{2} \mathbf{h}_n{}^b h - h_n{}^b \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

che è il tensore di Ricci in approssimazione linearizzata.

Se vogliamo descrivere la fisica newtoniana, oltre all'ipotesi di campo debole, sarà necessario introdurne una seconda: l'approssimazione non relativistica (tutte le velocità a cui siamo abituati, infatti, sono molto al di sotto della velocità della luce).

Con le ipotesi introdotte, le equazioni di Einstein (2) si scriveranno come:

$$\frac{\Delta \Phi}{c^2} - \Lambda g_{00} = \frac{1}{2} k r c^2 \quad (7)$$

che deve ridursi alla classica equazione di Newton:

$$\Delta \Phi = 4\pi G r \quad (8)$$

quindi $\Lambda = 0$ e $k = \frac{8\pi G}{c^4}$

L'equazione del campo di Einstein, pertanto, si ridurrà a:

$$G^{mm} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{mm} \quad (9)$$

La (9), che costituisce il punto centrale della teoria della Relatività Generale, lega la distribuzione di energia (quindi anche la massa) alla curvatura dello spazio-tempo. Questa idea viene descritta efficacemente paragonando la deformazione subita dallo spazio-tempo, ad opera di un corpo massivo, con quella che subirebbe un telo (elastico e ben teso) qualora vi fosse appoggiata una sferetta (si vedano **Figura 1a** e **1b**).

Malgrado la forma semplice ed abbreviata che l'equazione del campo di Einstein assume una volta introdotto il tensore di Einstein G^{mn} (che esprime la curvatura) e il tensore energia-impulso T^{mn} , l'equazione di Einstein è una complessa equazione differenziale, non risolvibile se non con opportune semplificazioni. Le onde gravitazionali di cui parleremo, altro non sono che la soluzione di questa equazione sotto l'ipotesi di considerare un "campo debole".

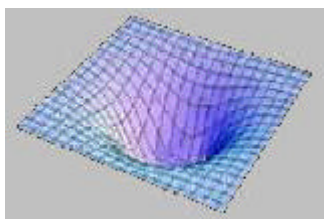


Figura 1a. Curvatura dello spazio-tempo dovuta ad una singola stella di neutroni

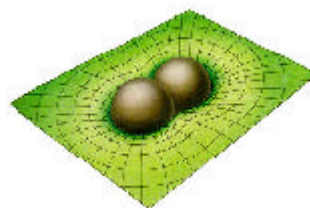


Figura 1b. Curvatura dello spazio-tempo dovuta alla presenza di un sistema binario

Definiamo ora:

$$f_m^n = h_m^n - \frac{1}{2} h_m^n h \quad (10)$$

A questo punto, senza perdere generalità, possiamo tranquillamente imporre alle f_m^n la condizione $\partial_n f_m^n = 0$ (si veda Misner, Thorne e Wheeler, 1973). Questa imposizione corrisponde ad una particolare scelta di gauge, necessaria per eliminare un'arbitrarietà nella definizione delle coordinate: modificando infatti come segue la scelta delle x^m

$$x^{m'} = x^m + \mathbf{x}^m$$

nessun tensore o scalare adottato nel formalismo (a parte f_m^n) è sensibile di alcuna alterazione al primo ordine (vedi paragrafo 1.4). Sottolineando la corrispondenza dell'intero formalismo con quello delle onde elettromagnetiche, la gauge

$$\partial_n f_m^n = 0 \quad (11)$$

è detta gauge di Lorentz (e si può scrivere anche, in coordinate generali, come $\partial_n (\sqrt{-g} g^{nn}) = 0$).

Imporre $\partial_n f_m^n = 0$, in base alla (10), equivale a dire che:

$$\partial_b (h_m^b - \frac{1}{2} h_m^b h) = 0$$

Allora, la (6), darà:

$$R_{mm} = -\frac{1}{2} \partial_b \partial^b h_{mm} \quad (12)$$

Mettiamo adesso la (12) appena ottenuta nell'equazione di Einstein

$$G_{mm} = R_{mm} - \frac{1}{2} g_{mm} R = \frac{8pG}{c^4} T_{mm}$$

$$-\frac{1}{2} \partial_b \partial^b h_{mm} + \frac{1}{4} (h_{mm} + h_{mm}) \partial_b \partial^b h = \frac{8pG}{c^4} T_{mm}$$

Risolvendo al primo ordine avremo:

$$-\frac{1}{2} \partial_b \partial^b h_{mm} + \frac{1}{4} h_{mm} \partial_b \partial^b h = \frac{8pG}{c^4} T_{mm} \quad (13)$$

Andando poi a calcolare $f_m^n = \partial_b \partial^b f_m^n$, possiamo scrivere:

$$f_m^n = \partial_b \partial^b h_m^n - \frac{1}{2} \partial_b \partial^b h_m^n$$

che andremo a mettere nella (13) ottenendo:

$$f_m^n = -\frac{16pG}{c^4} T_m^n \quad (14)$$

le (14) sono le equazioni del campo di Einstein al primo ordine perturbativo.

In conclusione, la teoria linearizzata della relatività si concretizza in tre equazioni fondamentali:

– definizione della metrica $g_{mm} = h_{mm} + h_{mm}$ (15a)

– gauge di Lorentz $\partial_n f_m^n = 0$ (16a)

– equazioni del campo $f_m^n = -\frac{16pG}{c^4} T_m^n$ (17a)

1.3 ONDE GRAVITAZIONALI

A questo punto della trattazione, risulta semplice approfondire il già citato parallelismo della teoria linearizzata dei campi gravitazionali con quella dell'elettromagnetismo.

In particolare, si confrontino le formule (16a) e (17a) del paragrafo precedente con le condizioni di gauge e le equazioni del campo in elettromagnetismo:

$$\partial_a A^a = 0 \quad (16b)$$

$$A^m = -4pJ^m \quad (17b)$$

Le due serie di equazioni si trasformano l'una nell'altra purché si sostituisca

$$A^m \leftrightarrow f_m^n$$

$$J^m \leftrightarrow T_m^n$$

Avremo pertanto che, essendo

$$A^x = A^x(t-z) \quad A^y = A^y(t-z) \quad A^z = 0 \quad A^0 = 0$$

l'onda piana che risolve le equazioni omogenee derivate dalle (16b) e (17b) in assenza di sorgenti, la soluzione delle (16a) e (17a) non sarà altro che l'onda piana gravitazionale:

$$f^{xx} = f^{xx}(t-z) \quad f^{xy} = f^{xy}(t-z) \quad f^{yx} = f^{yx}(t-z) \quad f^{m0} = f^{mx}$$

Infine si può concludere il confronto osservando come, analogamente a quanto si può fare con il potenziale elettromagnetico, anche $f_{\mathbf{m}\mathbf{m}}$ si scrive sottoforma di potenziale ritardato (Misner, Thorne e Wheeler, 1973) come:

$$f_{\mathbf{m}\mathbf{m}}(t, x) = \int \frac{4T_{\mathbf{m}\mathbf{m}}(t - |x - x'|, x')}{|x - x'|} d^3x'$$

1.4 ONDE GRAVITAZIONALI PIANE NEL VUOTO

Torniamo a considerare a questo punto le equazioni (16a) e (17a) nell'ipotesi di onde che si propagano nel vuoto ($T_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = 0 \Rightarrow f_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = 0$):

$$\partial_n f_{\mathbf{m}}^n = 0 \quad (18)$$

$$f_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = 0 \quad (19)$$

La soluzione più semplice all'equazione (19) è costituita dall'onda piana monocromatica:

$$f_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = \Re \left[A_{\mathbf{m}\mathbf{m}} e^{ik_a x^a} \right] \quad (20)$$

con

$$k_a k^a = |k^2| - k_0^2 = 0 \quad (21)$$

Nella (20), la notazione \Re indica che abbiamo estratto soltanto la parte reale, $A_{\mathbf{m}\mathbf{m}}$ è l'ampiezza dell'onda e k_a il suo vettore d'onda. Inoltre, in base alla (21), sarà

$$w \equiv k^0 = \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right)^{1/2}$$

La (20) rappresenta un set di 10 equazioni nelle 10 incognite $A_{\mathbf{m}\mathbf{m}}$ (una per ogni $f_{\mathbf{m}\mathbf{m}}$, che sono 10 come le componenti indipendenti del tensore $T_{\mathbf{m}\mathbf{m}}$). Avremo inoltre che $A_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = A_{\mathbf{m}\mathbf{m}}$, per simmetria. La condizione (21) fa sì che la (20) sia soluzione della (19).

Affinché la (18) risulti soddisfatta dalla (20), invece, deve essere che:

$$A_{\mathbf{m}\mathbf{m}} k^n = 0 \quad (22)$$

Le (22) sono 4 vincoli sulle 10 variabili A_{mm} , quindi hanno l'effetto di ridurle a 6 le componenti indipendenti.

Rimane ancora da sfruttare l'arbitrarietà di gauge: infatti la condizione (18) resta inalterata se operiamo il cambiamento di coordinate:

$$x^{m'} = x^m + \mathbf{x}^m \quad (23)$$

Questo a condizione di prendere delle \mathbf{x}^m tali per cui:

$$\mathbf{x}^m = 0 \quad (24)$$

Calcoliamo ora quale sarà l'effetto della trasformazione (23) sul tensore della metrica e poi sul tensore f_m^n .

Il tensore della metrica si trasformerà in questo modo:

$$g'^{ns}(x'^m) = g'^{ns}(x^m + \mathbf{x}^m)$$

Sviluppando in serie di Taylor al primo ordine, avremo:

$$\begin{aligned} g'^{ns}(x'^m) &= g'^{ns}(x^m) + \mathbf{x}^m \partial_m g'^{ns} \\ g'^{ns}(x^m) + \mathbf{x}^m \partial_m g'^{ns} &= g^{ns}(x^m) + g^{nt} \partial_t \mathbf{x}^s + g^{sm} \partial_m \mathbf{x}^n \\ g'^{ns}(x^m) &= g^{ns}(x^m) - \mathbf{x}^m \partial_m g^{ns} + g^{nm} \partial_m \mathbf{x}^s + g^{sm} \partial_m \mathbf{x}^n \end{aligned} \quad (25)$$

(dove abbiamo chiamato $\hat{}$ l'indice muto). Confrontando la (25) con la più generale

$$g'^{mm} = g^{mm} + dg^{mm}$$

avremo che

$$dg^{ns} = -\mathbf{x}^m \partial_m g^{ns} + g^{nm} \partial_m \mathbf{x}^s + g^{sm} \partial_m \mathbf{x}^n$$

ma il secondo membro (vedi Landau e Lifšic, 1964) si può scrivere come:

$$-\mathbf{x}^m \partial_m g^{ns} + g^{nm} \partial_m \mathbf{x}^s + g^{sm} \partial_m \mathbf{x}^n = \partial^s \mathbf{x}^n + \partial^n \mathbf{x}^s$$

Quindi:

$$dg^{ns} = \partial^s \mathbf{x}^n + \partial^n \mathbf{x}^s \quad \text{e} \quad dg_{sn} = -\partial^s \mathbf{x}^n - \partial^n \mathbf{x}^s$$

Infine, considerando la

$$g_{mm} = h_{mm} + h_{mm}$$

avremo:

$$\mathbf{d}g_{sn} = h'_{sn} - h_{sn} = -\partial_s \mathbf{x}_n - \partial_n \mathbf{x}_s$$

$$h'_{mm} = h_{mm} - \partial_n \mathbf{x}_m - \partial_m \mathbf{x}_n \quad \text{e} \quad h' = h - \mathbf{h}^{mm} \partial_n \mathbf{x}_m - \mathbf{h}^{mm} \partial_m \mathbf{x}_n$$

Calcoliamo ora quale sarà l'effetto del cambiamento di gauge sulle variabili di campo:

$$\mathbf{f}_{mm} = h_{mm} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{mm} h$$

$$\mathbf{f}'_{mm} = h'_{mm} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{mm} h'$$

$$\mathbf{f}'_{mm} = h_{mm} - \partial_n \mathbf{x}_m - \partial_m \mathbf{x}_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{mm} h + \frac{1}{2} \mathbf{h}_{mm} (\partial_a \mathbf{x}^a + \partial_a \mathbf{x}^a)$$

quindi il tensore che risolve la (18) e la (19) si trasforma in questo modo:

$$\mathbf{f}'_{mm} = \mathbf{f}_{mm} - \partial_n \mathbf{x}_m - \partial_m \mathbf{x}_n + \mathbf{h}_{mm} \partial_a \mathbf{x}^a \quad (26)$$

Ritorniamo ora a considerare le equazioni (24) che avevamo imposto. Per onde piane e monocromatiche, una soluzione è:

$$\mathbf{x}^m \equiv -i C^m e^{ik_a x^a} \quad (27)$$

dove C^m sono 4 costanti arbitrarie. Determinare queste 4 costanti significa fare una scelta di gauge che fissa automaticamente le 4 \mathbf{x}^m . Queste ultime, attraverso la (26), impongono 4 vincoli sulle 6 componenti \mathbf{f}_{mm} (ovverosia sulle A_{mm}) riducendone così, alla fine, il numero a 2.

Andiamo a calcolare come questo avviene.

Mettendo l'equazione (27) nella (26) avremo:

$$\mathbf{f}'_{mm} = \mathbf{f}_{mm} - C_m k_n e^{ik_a x^a} - C_n k_m e^{ik_a x^a} + \mathbf{h}_{mm} C_a k^a e^{ik_a x^a} \quad (28)$$

sostituendo ora \mathbf{f}_{mm} con l'espressione (20) (dove omettiamo il simbolo \Re e consideriamo la parte reale sottintesa):

$$A'_{mm} e^{ik_a x^a} = A_{mm} e^{ik_a x^a} - C_m k_n e^{ik_a x^a} - C_n k_m e^{ik_a x^a} + \mathbf{h}_{mm} C_a k^a e^{ik_a x^a}$$

$$A'_{mm} = A_{mm} - C_m k_n - C_n k_m + \mathbf{h}_{mm} C_a k^a \quad (29)$$

Derivando la (26) si ottiene:

$$\begin{aligned}\partial_n \mathbf{f}'^m &= \partial_n \mathbf{f}^m - \partial_n \partial^n \mathbf{x}^m - \partial_n \partial^m \mathbf{x}^n + \mathbf{h}^m \partial_n \partial_a \mathbf{x}^a = \\ &= \partial_n \mathbf{f}^m - \mathbf{x}^m\end{aligned}\quad (30)$$

Imponiamo finalmente l'equazione $\mathbf{x}^m=0$ e avremo:

$$\partial_n \mathbf{f}'^m = \partial_n \mathbf{f}^m$$

ovverosia (derivando la (20) e considerando la (22)):

$$A'_{\mathbf{m}} k^n = A_{\mathbf{m}} k^n = 0 \quad (31)$$

Dalla (21), e poiché k_1 , k_2 e k_3 non possono essere tutte nulle contemporaneamente, sappiamo che $k_0 \neq 0$. Imponendo perciò un'opportuna C_m nella (29) (le C sono arbitrarie) avremo:

$$A'_{10} = A_{10} - C_1 k_0 - C_0 k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{A_{10}}{k_0} - \frac{C_0}{k_0} k_1 \quad (32)$$

$$A'_{20} = A_{20} - C_2 k_0 - C_0 k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{A_{20}}{k_0} - \frac{C_0}{k_0} k_2 \quad (33)$$

$$A'_{30} = A_{30} - C_3 k_0 - C_0 k_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{A_{30}}{k_0} - \frac{C_0}{k_0} k_3 \quad (34)$$

(scegliendo le C in modo che $A'_{00} = A_{00} - 2C_0 k_0 - (C_a k^a) = 0$)

Le equazioni (32), (33) e (34) che, come abbiamo visto, discendono direttamente dalla (24), sono quindi tre vincoli sulle $A_{\mathbf{m}}$.

Aggiungiamo un ultimo vincolo imponendo che la traccia della (29) risulti nulla:

$$A'^a_a = 0 \quad (35)$$

$$A'^a_a = A^a_a - C^a k_a - C^a k_a + \mathbf{d}^a_a (C^b k_b) = 0$$

$$A^a_a - 2C^a k_a + 4C^a k_a = 0$$

$$A^a_a + 2C^a k_a = 0$$

e, introducendo le (32), (33) e (34) calcolate prima, avremo:

$$A^a{}_a - 2C_0 k_0 + 2k_1 \left(\frac{A_{10}}{k_0} - \frac{C_0}{k_0} k_1 \right) + 2k_2 \left(\frac{A_{20}}{k_0} - \frac{C_0}{k_0} k_2 \right) + 2k_3 \left(\frac{A_{30}}{k_0} - \frac{C_0}{k_0} k_3 \right) = 0$$

$$A^a{}_a - 2C_0 k_0 + \frac{2}{k_0} (A_{10} k_1 + A_{20} k_2 + A_{30} k_3) - \frac{2C_0}{k_0} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = 0$$

$$A^a{}_a + 2A_{00} - 4C_0 k_0 = 0$$

Quindi l'ultima condizione sulle $A_{\mathbf{m}}$ risulta essere:

$$C_0 = \frac{1}{4k_0} (A^a{}_a + 2A_{00}) \quad (36)$$

Perciò, affinché la generica onda piana (20) rispetti le variabili del moto (18) e (19), dobbiamo imporre la validità delle seguenti equazioni:

– 4 equazioni (31)

$$A'_{\mathbf{m}} k^n = A_{\mathbf{m}} k^n = 0$$

– 3 equazioni (32), (33) e (34)

$$A'_{m0} = 0$$

– l'equazione (35)

$$A'^m{}_m = 0$$

Quelli imposti, in totale, sono perciò 8 vincoli sulle 10 variabili di partenza. In particolare, il significato fisico della (31) è di imporre l'ortogonalità delle $A_{\mathbf{m}}$ alla direzione di propagazione dell'onda, mentre quello della (35) è, chiaramente, di annullarne la traccia.

Quindi, per un'onda gravitazionale monocromatica nel vuoto, è sempre possibile fare una scelta di gauge che riduca a 2 soltanto le componenti dell'onda: questa gauge si chiama gauge traversa a traccia nulla (o TT gauge).

1.5 LA GAUGE TRASVERSA A TRACCIA NULLA

Nel paragrafo precedente, abbiamo dimostrato che, per la definizione delle onde piane nel vuoto, esiste un'arbitrarietà nella scelta delle gauge. Ciascuna gauge, pertanto, è valida quanto un'altra.

Illustriamo in questo paragrafo le proprietà della gauge traversa a traccia nulla, che presenta il vantaggio di portare a risultati molto semplici. E' importante sottolineare che, ai fini pratici, quanto si misura sperimentalmente sono degli scalari gauge-invarianti (come ad esempio la fase di un'onda) quindi l'utilizzo di una gauge piuttosto che un'altra non comporta cambiamenti nel risultato finale, e ci consente di utilizzare liberamente quella che ci fa più comodo.

Consideriamo, come esempio, un'onda piana che si propaga lungo l'asse delle z:

$$k_1 = k_2 = 0$$

essa sarà caratterizzata da (vedi formula (21)):

$$k_3 (= k_0) \neq 0$$

Imponendo la trasversalità (31) avremo:

$$A_{m0}k^0=0 \Rightarrow A_{m0}=0 \quad (\text{e, per la simmetria di } A_{mm}) \quad A_{0m}=0 \quad (37)$$

$$A_{m3}k^3=0 \Rightarrow A_{m3}=0 \quad (\text{e, per la simmetria di } A_{mm}) \quad A_{3m}=0 \quad (38)$$

Imponendo la traccia nulla (35) avremo:

$$A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

ma A_{00} e A_{33} sono nulle rispettivamente per la (37) e (38), quindi:

$$A_{11} + A_{22} = 0$$

ovvero:

$$A_{11} = -A_{22}$$

In conclusione, scriveremo la matrice di componenti A_{mm} come:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chiamando:

$$A_{11} = A_+ \quad \text{e} \quad A_{12} = A_x$$

le due polarizzazioni, potremo riscrivere A nella forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_x & 0 \\ 0 & A_x & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la polarizzazione lineare appena illustrata, i tensori di base risulteranno essere:

$$e_+^{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (e_x^m e_x^n - e_y^m e_y^n)$$

$$e_x^{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (e_x^m e_y^n + e_x^n e_y^m)$$

Oltre a questa polarizzazione lineare, è possibile osservare che (si veda, ad esempio, Misner, Thorne e Wheeler, 1973) le onde gravitazionali piane si scompongono anche attraverso componenti circolarmente polarizzate, in perfetta analogia con le onde elettromagnetiche. Ci limitiamo qui ad indicare i tensori unitari che costituiscono questa polarizzazione:

$$e_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_+ + i e_x)$$

$$e_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_+ - i e_x)$$

1.6 NATURA QUADRIPOLORE DELLE ONDE GRAVITAZIONALI

Concludiamo il capitolo tornando, per l'ultima volta, a considerare il parallelismo fra teoria elettromagnetica e gravitazionale, sottolineando alcuni aspetti che torneranno utili nel capitolo 4.

In elettromagnetismo, per una distribuzione non-relativistica di carica, il momento di dipolo elettrico di una carica puntiforme è $d_j = ex_j$ e genererà una radiazione di dipolo di luminosità (vedi Misner, Thorne e Wheeler, 1973):

$$L_{\text{em}} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}_j \ddot{d}_j \quad (39)$$

Applicando la sostituzione $e^2 \Rightarrow Gm^2$, dovremmo poter scrivere l'energia per unità di tempo, emessa da un campo gravitazionale sottoforma di radiazione bipolare, come:

$$L_{\text{GW}} \propto \frac{G}{c^3} \ddot{d}_j \ddot{d}_j \quad (40)$$

dove:

$$d_j = \sum_A m_A x_j^A \quad (41)$$

è l'analogo del momento di dipolo elettrico nella fisica gravitazionale.

Deriviamo ora la (41):

$$\dot{d}_j = \sum_A m_A \dot{x}_j^A = \sum_A p_j^A \quad (42)$$

Nella (42), p_j^A è l'impulso dell' A -esima particella e $\sum_A p_j^A$ è la quantità di moto totale del sistema. Poiché quest'ultima, per un sistema isolato, deve essere costante, allora:

$$\sum_A \dot{p}_j^A = \sum_A m_A \ddot{x}_j^A = \ddot{d}_j = 0 \quad (43)$$

e non avremo nessun contributo da parte di d_j .

Analogamente, la radiazione di dipolo magnetico risulta generata dalla derivata seconda del momento magnetico, **iii**. L'analogo gravitazionale di $\dot{\mathbf{i}}$ risulta, ancora una volta, una costante del moto: il momento angolare totale del sistema

$$\dot{\mathbf{i}} = \frac{1}{c} \sum_A \mathbf{x}^A \times (m_A \dot{\mathbf{x}}^A) = \frac{1}{c} \sum_A \mathbf{j}^A \quad (44)$$

la cui derivata temporale sarà nulla.

Pertanto possiamo concludere che non esiste radiazione di dipolo associata all'emissione gravitazionale.

Andremo quindi a considerare il primo termine radiativo non nullo, cioè quello di quadrupolo.

Seguendo, ancora una volta, le notazioni di Misner, Thorne e Wheeler (1973), la radiazione di quadrupolo gravitazionale avrà una luminosità di:

$$L_{\text{GW}} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle \quad (45)$$

dove con le parentesi angolari è indicata la mediazione su diversi periodi, e con I_{jk} il momento di quadrupolo di massa ridotto:

$$I_{jk} = \sum_A m_A \left[x_j^A x_k^A - \frac{1}{3} \mathbf{d}_{jk} (x^A)^2 \right] \quad (46)$$

In conclusione, se calcoliamo la luminosità della radiazione emessa da un corpo in onde elettromagnetiche e gravitazionali, arrendoci al primo termine non nullo, dovremo considerare una radiazione dipolare per quanto riguarda le prime, e una di quadrupolo per quanto riguarda le ultime, secondo le formule:

$$L_{\text{em}} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}_j \ddot{d}_j \quad (47)$$

$$L_{\text{GW}} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle \quad (48)$$

CAPITOLO 2

I GAMMA RAY BURSTS

La piena comprensione della natura dei gamma-ray bursts (GRBs) è, senza dubbio, una delle maggiori sfide dell'astrofisica moderna. Questi flash di raggi gamma ci provengono (con altissime energie) dallo spazio, molto probabilmente da distanze cosmologiche, e rappresentano gli oggetti elettromagneticamente più luminosi nell'Universo. Questo motivo li ha resi oggetto di numerosi studi, nell'ambito dei quali si inserisce anche il modello buco nero-toro che andremo ad illustrare. Diamo ora un rapido profilo del fenomeno GRBs, sottolineando i molti aspetti fisici che fanno del modello da noi esaminato uno dei più interessanti.

2.1 IL FENOMENO GRB

Scoperti per la prima volta negli anni '60, grazie a satelliti come Vela e Konus (costruiti per scopi militari), i bursts si arricchiscono oggi di informazioni e indizi sulla loro origine grazie a satelliti quali BeppoSAX e BATSE.

Il satellite italo-olandese BeppoSAX (si veda indirizzo internet <http://bepposax.gsfc.nasa.gov/bepposax/>), grazie ad un'ampia copertura spettrale (da 0.1 a più di 200 KeV), un'area scandagliata relativamente grande e una buona risoluzione spettrale associata ad una buona risoluzione spaziale, consente, per la prima volta, di osservare contemporaneamente tutte quelle caratteristiche dei GRBs che, in passato, sono state osservate da diverse missioni (ad esempio sarà possibile osservare spettri molto complessi su tutta la banda X).

L'esperimento BATSE (Burst and Transient Source Experiment), invece, fornisce informazioni per quanto riguarda il tempo di trigger dei segnali, la posizione nella quale vengono rilevati, i flussi di picco e totali e la durata di ogni singolo evento rilevato (si veda sito internet <http://www.batse.msfc.nasa.gov/>). Dall'analisi di questi dati si deduce che la distribuzione angolare è consistente con l'ipotesi di isotropia, la distribuzione in intensità contrasta con l'ipotesi di omogeneità dello spettro delle sorgenti (come verrà dimostrato con la **Figura 6**), non emerge evidenza di sorgenti ripetute e la distribuzione temporale è bimodale (con picchi intorno a qualche millesimo e a qualche decina di secondi).

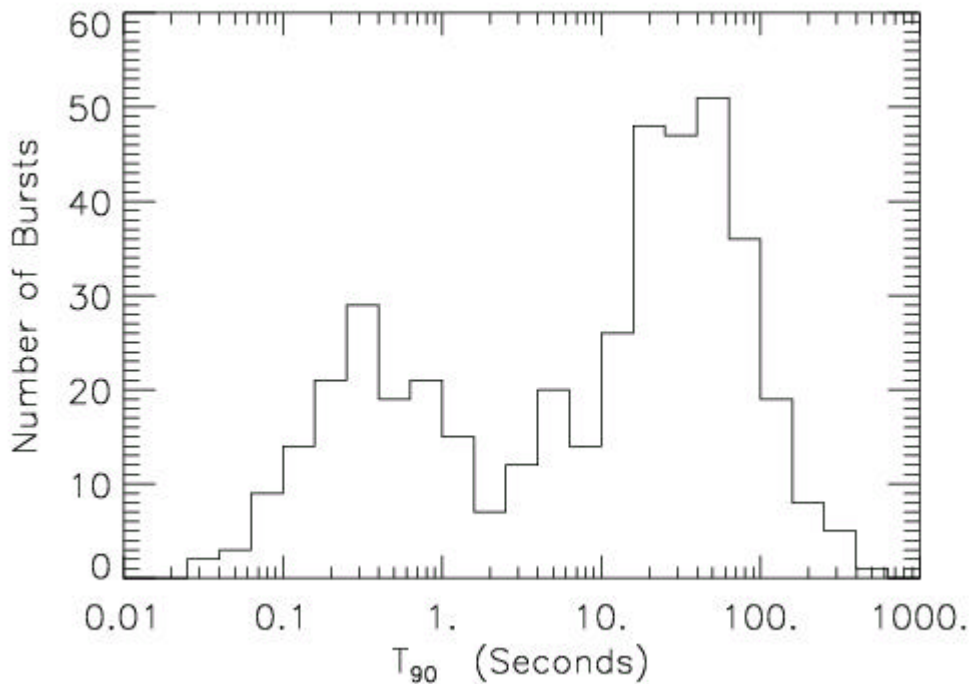


Figura 2. La distribuzione bi-modale della durata dei GRBs in conteggi al secondo. Il parametro di durata usato è T_{90} , cioè il tempo impiegato dal burst per emettere dal 5% al 95% della sua energia. Il picco di sinistra indica i cosiddetti “bursts brevi”, quello di destra i “bursts lunghi” .

La definizione di “durata di un burst”, naturalmente, non è unica. Se con “durata” intendiamo il tempo (T_{90}) impiegato dalla sorgente per emettere dal 5% al 95% dei conteggi, possiamo distinguere, in accordo con la classificazione utilizzata dai ricercatori del BATSE, una distribuzione bimodale come quella di **Figura 2**:

vengono detti “bursts lunghi” quelli per cui $T_{90} > 2s$ e “bursts brevi” quelli per cui $T_{90} < 2s$.

Nell’arco della durata di un burst, è caratteristico il fatto che la sua intensità subisce numerose ed improvvise variazioni, che le fanno assumere il profilo irregolare visibile in **Figura 3**. Il fenomeno appena descritto, associato alla necessità di avere un’emissione energetica di 10^{51} - 10^{53} ergs, ha portato a pensare che l’origine più plausibile del fenomeno sia legata ad un “motore” centrale e compatto, la cui attività interna viene riflessa dalle brusche variazioni d’intensità di **Figura 3**.

La distribuzione spaziale dei bursts (come appare dalla **Figura 4**) risulta isotropa, suffragando così l’ipotesi di un’origine cosmologica, mentre quella dello spettro di energia è, naturalmente, affetta da redshift. Il valore di redshift misurato per i bursts lunghi risulta dell’ordine di un’unità (come si osserva dalla tabella di **Figura 5**, tratta da van Putten, 2001a).

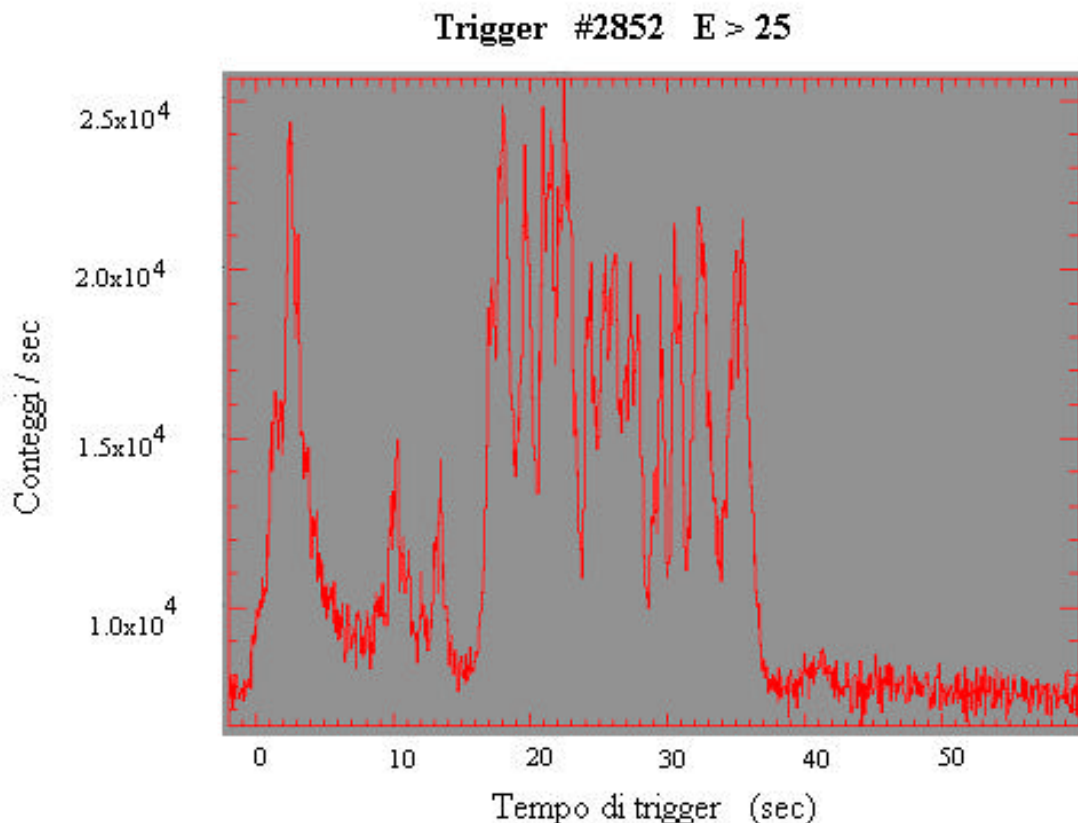


Figura 3. Intensità del gamma-ray burst numero 2852 in funzione del tempo. Il burst durò meno di 40 secondi.

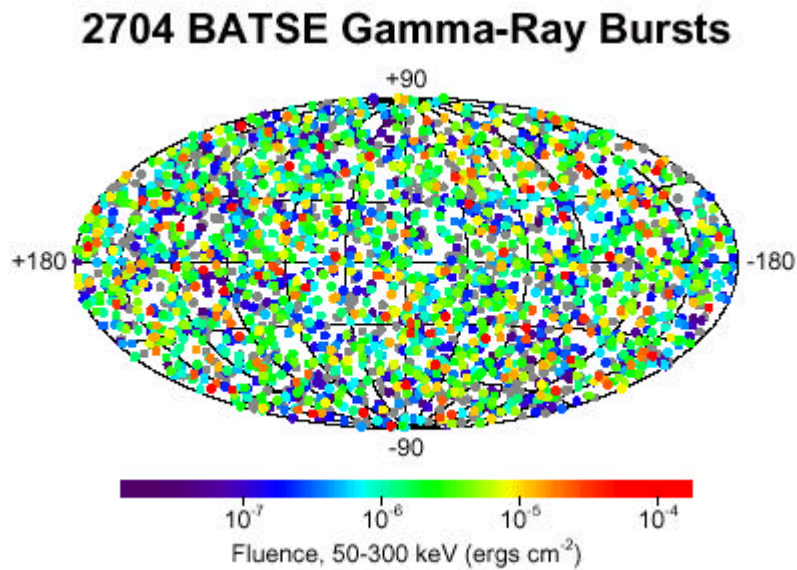


Figura 4. Collocazione spaziale di 2704 GRBs rilevati dal satellite BATSE in un periodo di nove anni. Si noti l'isotropia (in coordinate galattiche) della distribuzione spaziale.

Event	Redshift
GRB 970228 (1,15)	0.695
GRB 970508 (2,16)	0.835
GRB 970828 (3)	0.958
GRB 971214 (4,18)	3.412
GRB 980425 (5,19)	0.008
GRB 980613 (6,20)	1.096
GRB 980703 (7,21)	0.967
GRB 990123 (8,22)	1.6
GRB 990510 (9,23)	1.619
GRB 990712 (10)	0.430
GRB 991208 (11)	0.707
GRB 000301C (12,24,27)	2.04
GRB 000418 (13,25)	1.118
GRB 000926 (14,26,28)	2.066

Figura 5. Misurazioni di redshift rilevate per GRBs lunghi. I valori di z tabulati confermano la natura cosmologica delle sorgenti di questi GRBs.

Malgrado l'isotropia, la distribuzione delle sorgenti di GRBs nello spazio non è omogenea. Infatti, il flusso previsto F , emesso da una sorgente di luminosità L ad una distanza r , secondo considerazioni classiche si scrive come:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

per cui, sotto l'ipotesi di uno spazio-tempo di Minkowski, dovremmo trovare un numero di conteggi pari a:

$$N = \frac{4\pi}{3} r r^3 = \frac{4\pi}{3} r \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{3/2} = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} r \left(\frac{L}{F} \right)^{3/2}$$

andamento rispetto il quale i dati sperimentali presentano una discordanza (come si vede dalla **Figura 6**) al calare di F . Pertanto, per flussi minori di un certo limite (cioè a grandi distanze) troviamo un minor numero di sorgenti in quanto osserviamo zone dello spazio-tempo primitive rispetto alla formazione delle galassie, quindi anche delle sorgenti di GRBs.

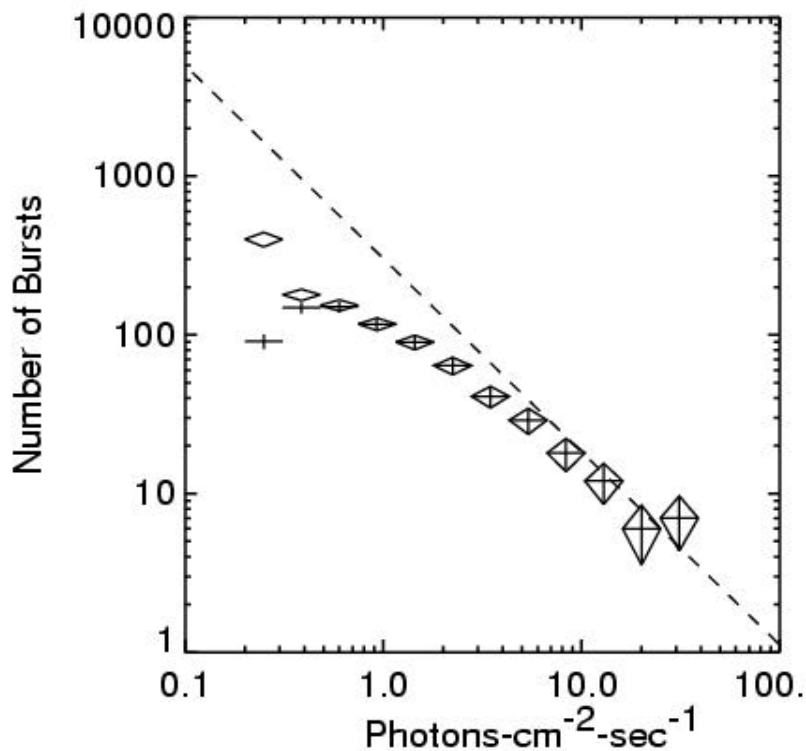


Figura 6. Numero di conteggi in funzione del flusso di fotoni F . Le croci rappresentano i dati non corretti, i diamanti quelli corretti nell'efficienza. La linea tratteggiata indica l'andamento previsto per $F^{-3/2}$ in caso di distribuzione omogenea delle sorgenti.

Per quanto riguarda la frequenza con cui i bursts vengono rilevati sulla terra, essa non è che di uno al giorno, con durate molto brevi. Tuttavia, la frequenza con cui vengono osservati i GRBs brevi, risulta nettamente inferiore a quella relativa ai GRBs lunghi. Il satellite BATSE, ad esempio, rileva i primi con una frequenza di 1/3 rispetto ai secondi. Il dato, che sembra suggerire una minore presenza di sorgenti di GRBs brevi, va interpretato però considerando come il meccanismo di triggering del BATSE lo renda meno sensibile ai GRBs brevi; di essi, pertanto, ci è possibile rilevare soltanto quelli di origine più prossima, mentre rileviamo GRBs lunghi originati anche a distanze maggiori (vedi Katz e Canel, 1996).

2.2 ORIGINE E SORGENTI DEI GRBs

Nonostante l'origine dei GRBs rimanga tuttora avvolta nel mistero, diverse ipotesi sono state via via formulate su quale tipo di fenomeno sia alla base di queste emissioni di raggi γ .

Il modello più generale, tuttavia, deve seguire una serie di fasi principali (vedi Piran, 1999):

- Un flusso relativistico di energia è prodotto da un “motore” interno, compatto ed invisibile.
- Avviene un trasporto dell'energia.
- L'energia viene convertita nella radiazione che misuriamo
- Un residuo dell'energia viene convertito in radiazione meno energetica (“afterglow”).

Per quanto riguarda il “motore” interno del fenomeno, esso è da identificarsi, con molta probabilità, con un buco nero, come nel modello buco nero-toro che andremo ad illustrare nei prossimi capitoli.

L'energia trasportata, secondo i modelli più autorevoli, è da associarsi al flusso di particelle relativistiche. A questa energia (a seconda delle teorie) viene attribuita una natura cinetica od elettromagnetica. Sarà cinetica se la consideriamo associata ad un'emissione di particelle ultrarelativistiche. Infatti, quando un rilevante quantitativo di energia è racchiuso in una regione significativamente piccola (sorgente compatta), essa viene rilasciata sottoforma di particelle ultrarelativistiche. Inoltre, sotto particolari condizioni, se nella stella compatta sono presenti barioni, l'energia verrà interamente rilasciata sottoforma di energia cinetica del flusso barionico. L'emissione energetica della sorgente sarà invece di natura elettromagnetica se la associamo ad un trasporto di energia ad opera del campo magnetico. Piran (1999) calcola che, per avere un'emissione di $E_{\gamma} \approx 10^{51}$ erg da un oggetto compatto di dimensioni inferiori ai 10^7 cm, è necessario un campo magnetico di almeno 10^{15} gauss alla sorgente, valore che può benissimo essere raggiunto dal collasso di stelle molto magnetizzate.

Per quanto riguarda invece la dinamica con la quale la conversione in radiazione gamma avviene, lo scenario degli "shocks interni" e quello degli "shocks esterni" illustrano le vie principali tramite le quali essa può avvenire. Il primo scenario (si veda nuovamente Piran, 1999) attribuisce la conversione dell'energia prodotta dalla sorgente in radiazione del burst a degli "urti" interni alla sorgente, ovverosia alla collisione dei fronti d'onda di ogni radiazione emessa con quelli più lenti emessi in precedenza (questi shocks sono detti "interni" proprio perché generati dall'interazione del flusso con sé stesso). La collisione di ogni coppia di onde crea un picco nel profilo temporale del burst, mentre il complesso delle collisioni subite dal treno d'onde dà luogo al burst completo. Questa teoria è in grado di giustificare la rapida variazione d'intensità che si registra nell'ambito di un singolo burst (vedi **Figura 3** nel paragrafo precedente) con un'altrettanto irregolare attività della sua sorgente (ancora ignota, e alla quale autori come Sari e Piran (1997) si riferiscono come "motore interno" del burst). In accordo invece con lo scenario degli "shocks esterni", formulato da Rees e Mészáros (1997), quando la sorgente di energia è

circondata da un mezzo interstellare, parte dell'energia dei fronti d'onda si dissipa urtando contro i detriti circostanti. Sari e Piran (1997) hanno dimostrato che uno shock di questo tipo non avrebbe energia sufficiente per produrre, nell'ambito del burst, variazioni di intensità tanto rilevanti da giustificare un profilo complesso e irregolare come quello di **Figura 3**; tuttavia, gli shocks "esterni" sembrerebbero essere una spiegazione plausibile al fenomeno degli "afterglow" (una sorta di emissione "smooth", che si verifica in corrispondenza di alcuni burst e che fu scoperta per la prima volta dal satellite italo-tedesco BeppoSax (Costa et al., 1997)).

Anche se non si è ancora giunti ad un'osservazione diretta del "motore interno" che dà origine ai bursts (probabilmente un oggetto compatto, come un buco nero), la struttura temporale di ciascuno di essi ci fornisce un'informazione indiretta di quale dev'essere la loro attività. Il modello sopra delineato ci suggerisce di attribuire la formazione del burst ad un "motore" compatto (si veda Piran, 1999) la cui dimensione è determinata dall'intervallo temporale con cui varia il segnale. Accanto al requisito della compattezza, Piran assume che la sorgente debba essere in moto con un fattore di Lorentz pari a $\gamma > 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 10^2$.

Il "motore interno" così ipotizzato produce, in un modo ancora imprecisato, un flusso relativistico di energia, sottoforma di un vento che si propaga verso l'esterno. Parte di quest'energia, come si è detto, è tramutata nella radiazione che costituisce il burst tramite shock "interni", mentre la parte rimanente verrà dissipata per via di shock "esterni" con i detriti del mezzo interstellare, dando origine agli "afterglow". L'emissione di energia, da parte del "motore" interno, viene descritta dal modello "fireball" (si veda, ad esempio, Paczyński, 1997) come un rilascio di energia a partire da una zona ridotta e di elevata energia (il "fireball", appunto) sottoforma di onde di particelle ad energie relativistiche.

Un'ultima, controversa questione, circa le caratteristiche fondamentali della stella compatta che funge da “motore” per i burst, è l'esistenza delle “sorgenti ripetute”, cioè se ad essa si debba attribuire l'emissione di un solo burst o più di uno. La scoperta, da parte del satellite BATSE, di una breve serie di bursts localizzati nello stesso punto dello spazio, e a breve distanza di tempo l'uno dall'altro, ha supportato l'ipotesi che le sorgenti non producano un unico flusso di radiazione, in corrispondenza di un singolo, catastrofico evento, ma possano comportarsi come degli emettitori a ripetizione. La questione, tuttavia, rimane ancora controversa e diversi autori (come Narayan e Piran, 1993) rifiutano questa ipotesi.

2.3 IL MODELLO BUCO NERO-TORO COME SORGENTE DI GRBs

La fenomenologia descritta nel paragrafo precedente (in particolar modo la distribuzione bi-modale dei bursts, la loro origine cosmologica ad opera di una sorgente compatta e la possibile emissione ripetuta da parte della sorgente stessa) ha suggerito la formulazione di un nuovo modello, ad opera di van Putten, che si pone in primo piano tanto per la corrispondenza di molti degli aspetti legati ai bursts, quanto per l'interessante previsione di una consistente emissione di onde gravitazionali.

Il modello buco nero-toro (che verrà spiegato in dettaglio nei prossimi capitoli) attribuisce l'origine dei gamma-ray bursts lunghi (brevi) ad uno stato di arresto (iper-)crescita di un buco nero di Kerr rispetto ad un toro circostante. Il buco nero, al centro del sistema, è suggerito come possibile “motore interno” per i burst, secondo quanto illustrato nel paragrafo precedente; al toro (residuo di una stella di neutroni inizialmente parte di un sistema binario assieme al buco nero) viene attribuita invece una considerevole emissione di radiazione gravitazionale, assieme

ad una elettromagnetica più esigua (e, quando la temperatura è molto elevata, anche un flusso di neutrini).

Esamineremo, nel capitolo che segue, la dinamica specifica del collasso che porta il sistema binario a generare il sistema buco nero-toro.

CAPITOLO 3

IL SISTEMA BUCO NERO-TORO

3.1 I BUCHI NERI E LA LORO METRICA

Dopo una rapida definizione dei principali tipi di buchi neri, considereremo quali fondamentali variazioni essi introducano nelle equazioni della fisica classica tramite la deformazione prodotta sullo spazio-tempo. Vedremo quindi come essi siano in grado di sostenere su orbite stabili una particella di prova: questo avverrà ogniqualvolta il suo momento angolare produce una forza centrifuga sufficiente a controbilanciare l'attrazione gravitazionale esercitata dal buco nero.

3.1.1 Il buco nero di Schwarzschild

Dalla Relatività Generale, consegue che la forza gravitazionale, attorno ad un buco nero, diventi infinita in corrispondenza di un valore particolare e finito della distanza da esso. Chiameremo questa distanza orizzonte degli eventi del buco nero.

Se il buco nero fosse privo di carica e non fosse in rotazione (buco nero di Schwarzschild), l'orizzonte corrisponderebbe alla superficie di Schwarzschild e potremmo trattare il sistema usando la metrica omonima. L'elemento della metrica di Schwarzschild (in unità geometriche) sarà:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2(d\mathbf{J}^2 + \sin^2 \mathbf{J} d\mathbf{f}^2) \quad (49)$$

nelle coordinate sferiche r , \mathbf{J} e \mathbf{f} , e nel tempo t . Questa metrica sarà applicabile a tutte le porzioni di spazio esterne alla sfera di raggio $r_s = \frac{2MG}{c^2}$ dove la (49) diventa singolare. Il raggio r_s è detto raggio di Schwarzschild e vale circa 3 Km quando la massa del buco nero è approssimabile a quella solare.

3.1.1.1 Particella in orbita attorno ad un buco nero di Schwarzschild

Consideriamo, in quest'approssimazione, una particella di prova in orbita attorno al buco nero; questa situazione ci consentirà di dimostrare come il cambiamento della metrica, in prossimità di un buco nero, provochi profonde variazioni nelle formule classiche per l'energia ed il momento angolare.

Proiettiamo (in accordo con quanto svolto da Misner, Thorne e Wheeler, 1973) la posizione della nostra particella e il suo vettore velocità su di una sfera di raggio fissato. Le due proiezioni individueranno in ogni momento, rispettivamente, un punto e un vettore sulla nostra sfera a raggio noto. Orientiamo quindi il sistema di coordinate sulla superficie della sfera in modo tale che la proiezione radiale dell'orbita della particella coincida con l'equatore della sfera ($\mathbf{J} = \delta/2$). Fissato in questo modo il sistema di coordinate sulla superficie sferica, e chiamato \mathbf{I} il parametro che varia con l'evolvere del tempo, ad ogni istante la particella avrà un impulso nullo nella direzione di \mathbf{J} :

$$p^{\mathbf{J}} = d\mathbf{J} / d\mathbf{I} = 0 \quad (50)$$

Il momento p^r sarà:

$$p^r = \frac{dr}{d\mathbf{I}} \quad (51)$$

mentre, le due coordinate f e t risulteranno cicliche. Avremo quindi la conservazione dei momenti coniugati:

$$p_0 \equiv -E \quad (52)$$

$$p_f \equiv \pm L \quad (53)$$

Consideriamo ora l'equazione di Hamilton-Jacobi nella geometria di Schwarzschild (vedi nuovamente Misner, Thorne e Wheeler, 1973) che si scrive come:

$$g_{ab} p^a p^b + \mathbf{m}^2 = g^{ab} p_a p_b + \mathbf{m}^2 = 0$$

ovverosia:

$$-\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial J}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 J}\left(\frac{\partial S}{\partial f}\right)^2 + \mathbf{m}^2 = 0 \quad (54)$$

in cui $p_a = \frac{\partial S}{\partial x^a}$ è l'impulso coniugato della particella di prova e \mathbf{m} è la sua massa a riposo. Tenendo presente che (per come abbiamo definito J) $\sin^2 J=1$, la (54) diventerà

$$-\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}p_0^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_f^2 + \mathbf{m}^2 = 0 \quad (55)$$

Andiamo ora a sostituire le (51), (52) e (53):

$$-\frac{E^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\mathbf{l}}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \mathbf{m}^2 = 0$$

$$\left(\frac{dr}{d\mathbf{l}}\right)^2 = E^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathbf{m}^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\mathbf{l}}\right)^2 = E^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\mathbf{m}^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (56)$$

Quanto ci interessa analizzare in questa sede, però, non è l'energia e il momento angolare della specifica particella in esame, bensì il generico moto per unità di massa a riposo. Procediamo pertanto dividendo per \dot{t}^2 ambo i membri dell'equazione precedente, e definendo:

- $\tilde{E} = E / m$ (= energia per unità di massa a riposo)
- $\tilde{L} = L / m$ (= momento angolare per unità di massa a riposo)

e identificando il parametro \tilde{t} con:

- $\tilde{t} = \hat{t} / \hat{m}$ (= tempo proprio fratto unità di massa a riposo)

Avremo pertanto:

$$\left(\frac{dr}{d\tilde{t}}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (57)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tilde{t}}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r) \quad (58)$$

nella quale abbiamo indicato con $\tilde{V}(r)$ il potenziale effettivo:

$$\tilde{V}(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)} \quad (59)$$

Calcoliamo ora quando il potenziale effettivo espresso dalla (59) risulterà attrattivo ($\tilde{V}(r) < 0$) e quando avremo l'equilibrio ($\tilde{V}(r) = 0$):

$$\frac{\partial \tilde{V}(r)}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)}} \left[\frac{2M}{r^2} \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) - 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\tilde{L}^2}{r^3} \right] \leq 0 \quad (60)$$

Oltre (naturalmente) al fattore $\frac{1}{2}$ possiamo trascurare il termine sotto radice (che è positivo e si annullerebbe soltanto per $r=2M$, cioè per un raggio pari a quello di Schwarzschild, eventualità che non consideriamo). Allora:

$$\frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right) - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\tilde{L}^2}{r^3} \leq 0$$

$$Mr^2 - r\tilde{L}^2 + 3M\tilde{L}^2 \geq 0 \quad (61)$$

che ha per soluzioni:

$$r = \frac{\tilde{L}^2 \pm \sqrt{\tilde{L}^4 - 12M^2\tilde{L}^2}}{2M} = \frac{\tilde{L}}{2M} \left(\tilde{L} \pm \sqrt{\tilde{L}^2 - 12M^2} \right) \quad (62)$$

Avremo, perciò, che deve essere:

$$\tilde{L}^2 - 12M^2 \geq 0$$

$$\tilde{L} \geq 2\sqrt{3}M \quad (63)$$

L'ultima orbita circolare stabile avrà quindi, per la (63):

$$\tilde{L} = 2\sqrt{3}M \quad (64)$$

Mettendo questo risultato nella formula (62) per r , avremo che la distanza critica di avvicinamento che la particella di prova può raggiungere prima di collassare sarà:

$$r=6M$$

ovverosia 3 volte il raggio di Schwarzschild.

Nella **Figura 7**, si mostra il potenziale effettivo per una particella di prova in un campo di Schwarzschild in funzione di r/M (a sinistra) ed \tilde{L}/M (a destra).

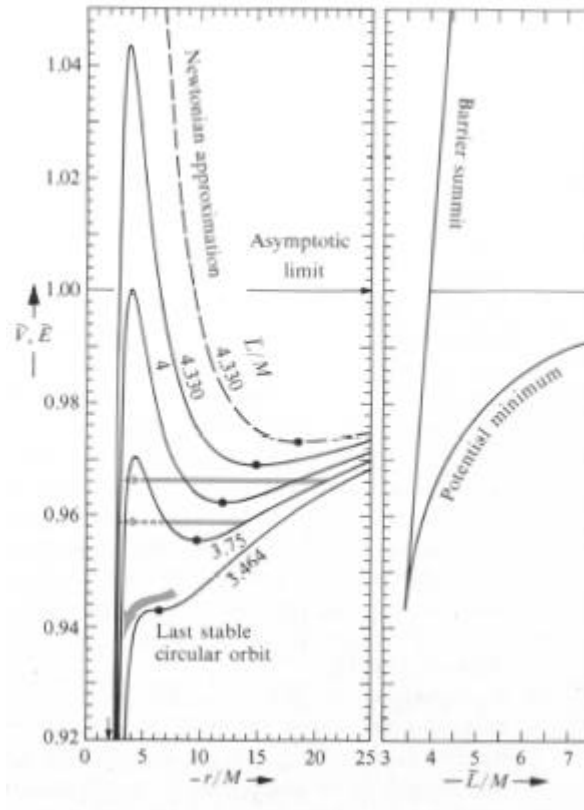


Figura 7. Nel grafico di sinistra è indicato l'andamento del potenziale effettivo $\tilde{V}(r)$ in funzione di r/M . Sono indicati anche alcuni dei possibili valori di momento angolare per unità di massa che ci consentono di avere punti d'equilibrio (vedi anche **Figura 8**). Essi saranno quelli per cui $\tilde{L} \geq 2\sqrt{3}M$ (ovvero $\tilde{L} \geq 3,464M$). L'ultima orbita stabile, in figura, sarà proprio quella caratterizzata da $\tilde{L} = 2\sqrt{3}M$, come calcolato nella (64). Sono indicati (dalle linee orizzontali) due possibili valori di energia che vincolano il moto della particella. Nel grafico di destra è indicato l'andamento dello stesso potenziale effettivo $\tilde{V}(r)$ ma in funzione di \tilde{L}/M .

Quando $\tilde{V}(r)=E$, per la (58),

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r)$$

e se $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 0$, allora $\left(\frac{dr}{dt}\right) = \text{costante}$. Questi punti sono detti “punti d’inversione”.

Quando una particella che viaggia verso valori di r sempre maggiori raggiunge un “punto d’inversione”, inverte la sua traiettoria e procede verso r minori. Allo stesso modo, una particella che viaggia verso r minori, raggiunto un “punto d’inversione”, inverte la sua traiettoria e procede verso r maggiori. In generale, un “punto d’inversione” non sarà un punto d’equilibrio, tuttavia, lo sarà quando $\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2$ (anziché una radice) ne avrà due. Se questo avviene in corrispondenza di un massimo di $\tilde{V}(r)$, sarà un equilibrio instabile, se in corrispondenza di un minimo di $\tilde{V}(r)$, sarà invece stabile. Da un punto di vista fisico, l’equilibrio si ottiene in virtù della compensazione fra la forza gravitazionale attrattiva del buco nero e quella centrifuga repulsiva dovuta al moto circolare. La particella di prova si troverà così a ruotare su di un’orbita circolare che mantiene costante nel tempo il suo raggio, senza collassare né allontanarsi dal buco nero.

Nella **Figura 8** è illustrato l’andamento del quadrato del potenziale effettivo in funzione di r/M .

Il semplice modello descritto in questo paragrafo è in grado di descrivere il comportamento di una particella in orbita attorno ad un buco nero non carico e stazionario; siamo ora in grado di generalizzare la situazione considerando la presenza di carica e una rotazione del corpo su sé stesso.

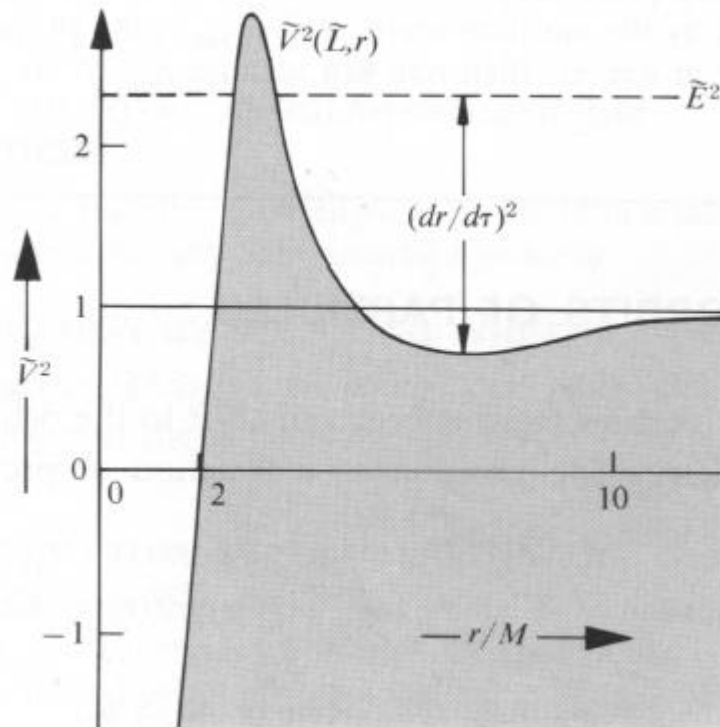


Figura 8. Andamento del quadrato del potenziale effettivo $\tilde{V}(r)$ in funzione di r/M . Il punto in cui il potenziale \tilde{V}^2 eguaglia il quadrato dell'energia disponibile (\tilde{E}^2) rappresenta un “punto d'inversione”. Si può notare che \tilde{V}^2 diventa negativo per una particella dentro al buco nero ($r < 2M$).

3.1.2 Il buco nero di Kerr-Newmann

Il collasso gravitazionale di una stella reale (che non sarà perfettamente sferica né perfettamente neutra), produce un buco nero che, in effetti, è molto diverso dal buco nero di Schwarzschild. Da questo collasso “non ideale” ci aspetteremo un buco nero il cui campo prodotto sarà caratterizzato esclusivamente dalla massa M , dalla carica Q e dal momento angolare intrinseco S della stella che collassa (vedi Misner, Thorne e Wheeler, 1973). Il perché proprio queste grandezze siano coinvolte, e non altre, si comprende considerando come soltanto massa, carica e momento angolare, essendo coinvolte da leggi di conservazione, siano in grado di lasciare un'impronta anche a grandi distanze, nei campi prodotti.

Un buco nero dotato, oltre che di una massa M (come quello di Schwarzschild), di una carica Q e di un momento angolare intrinseco S si chiama buco nero di Kerr-Newman.

La geometria di un buco nero di Kerr-Newman (in unità geometriche) è data da:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} [dt - a(\sin^2 J)df]^2 + \frac{\sin^2 J}{r^2} [(r^2 + a^2)df - a dt]^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 dJ^2 \quad (65)$$

dove:

$$a \equiv S / M \quad (\text{momento angolare per unità di massa})$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$

$$r^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 J$$

In analogia alla metrica di Schwarzschild, la (65) dovrà diventare singolare sull'orizzonte degli eventi, cioè sulla superficie stessa del buco nero. Quindi per:

$$\Delta=0 \quad r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$$

avremo l'orizzonte degli eventi.

Le coordinate t , r , J e f , generalizzazione delle coordinate di Schwarzschild, prendono il nome di coordinate di Boyer-Lindquist. Il buco nero ruoterà nella direzione di f . Inoltre, come si può vedere dalla (65), i coefficienti della metrica di Boyer-Lindquist risultano indipendenti da t e da f ; questo significa che lo spazio-tempo da essi generato è stazionario (indipendente da t) e simmetrico rispetto all'asse di rotazione.

Dopo questa premessa, analizzeremo, come abbiamo fatto nel paragrafo precedente per un buco nero di Schwarzschild, quale sarà l'orbita di una particella di prova attorno ad un buco nero di Kerr-Newman.

3.1.2.1 Particella in orbita attorno ad buco nero di Kerr-Newman

L'energia all'infinito, di una particella di prova di massa \dot{m} e momento angolare L_z , collocata in una certa posizione di coordinate (r, \mathbf{J}) all'esterno del buco nero, sarà (Misner, Thorne e Wheeler, 1973):

$$E = \frac{\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}\mathbf{g}}}{\mathbf{a}} \quad (66a)$$

con: $\mathbf{a} = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \mathbf{J} > 0$ (ovunque nello spazio esterno all'orizzonte) (67a)

$$\mathbf{b} = (L_z a + eQr)(r^2 + a^2) - L_z a \Delta \quad (68a)$$

$$\mathbf{g} = (L_z a + eQr)^2 - \Delta (L_z / \sin \mathbf{J})^2 - \dot{m}^2 \Delta r^2 - r^4 \left[(p^r)^2 + \Delta (p^J)^2 \right] \quad (69a)$$

in cui a , Δ , ρ , p^r e p^J sono definiti come nel paragrafo 3.1.2.

Andiamo anche qui a considerare soltanto il moto radiale della particella, prenderemo perciò:

$$\mathbf{J} = \mathbf{p} / 2$$

$$p^J = 0$$

per cui $\sin^2 \mathbf{J} = 1$ e $r^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \mathbf{J} = r^2$.

Pertanto le (67a), (68a) e (69a) diventeranno:

$$\mathbf{a}' = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 > 0 \quad (67b)$$

$$\mathbf{b}' = (L_z a + eQr)(r^2 + a^2) - L_z a \Delta \quad (68b)$$

$$\mathbf{g}' = (L_z a + eQr)^2 - \Delta L_z^2 - \dot{m}^2 \Delta r^2 - r^4 (p^r)^2 = \mathbf{g}_0 - r^4 (p^r)^2 \quad (69b)$$

Avremo perciò che la formula (66a) diventa:

$$E = \frac{\mathbf{b}' + \sqrt{\mathbf{b}'^2 - \mathbf{a}'\mathbf{g}'}}{\mathbf{a}'} \quad (66b)$$

$$E = \frac{\mathbf{b}' + \sqrt{\mathbf{b}'^2 - \mathbf{a}'\mathbf{g}_0 + \mathbf{a}'r^4 (p^r)^2}}{\mathbf{a}'} \quad (70)$$

Ricordando come $p^r = \frac{dr}{d\mathbf{l}}$, la (70) risulta essere un'equazione differenziale.

Ad un valore fisso del raggio r , il potenziale effettivo sarà il minimo valore permesso per E :

$$V(r) = \frac{b' + \sqrt{b'^2 - a' g_0}}{a'} \quad (71)$$

La formula (71) sarà quindi una soluzione particolare, ottenuta dalla (66a) considerando solo orbite appartenenti al “piano equatoriale” (cioè $J=i/2$ e $p^J=0$). E' tuttavia importante considerare come, dalla formula più generale (66a) si possono trarre numerose conclusioni circa il moto di una particella di prova attorno ad un buco nero il più generale possibile.

Innanzitutto è necessario considerare come una variazione dell'energia della particella di prova (per la conservazione dell'energia) corrisponde ad una variazione in massa del buco nero e una variazione di carica della particella di prova corrisponde ad una variazione della sua carica; d'altro canto una variazione del momento angolare L_z corrisponde ad una variazione del momento angolare intrinseco del buco nero:

$$\Delta M = E_i - E_f \quad \Delta Q = e_i - e_f \quad \Delta S = L_{zi} - L_{zf} \quad (72)$$

Considerando quindi una particella che, dall'infinito, collassa in un buco nero, le formule (72) si semplificano in questo modo:

$$\begin{aligned} \Delta M &= E_\infty && \text{(energia all'infinito della particella)} \\ \Delta Q &= e && \text{(carica della particella)} \\ \Delta S &= L_z && \text{(comportamento del momento angolare della particella} \\ &&& \text{nella direzione dell'asse di rotazione del buco nero)} \end{aligned} \quad (73)$$

L'energia E descritta dalla (66a) pertanto, corrisponderà ad una variazione della massa complessiva del buco nero. Consideriamo quindi cosa accade quando $E < 0$ (quindi il buco nero perde massa). Nella (66a), possiamo ottenere $E < 0$ se e solo se $\hat{a} < 0$ e $\tilde{a} > 0$ (\hat{a} infatti è sempre > 0). Questo comporta $\ddot{A} < 0$ (per avere $\tilde{a} > 0$) e, di conseguenza, $L_{za} < 0$ e/o $eQ < 0$ (per avere $\hat{a} < 0$).

In conclusione, per avere $\ddot{M} < 0$ dobbiamo necessariamente avere $L_z a < 0$ e/o $eQ < 0$. Il significato fisico di questo vincolo è che per diminuire la massa di un buco nero, dobbiamo contemporaneamente ridurre: o il modulo della sua carica elettrica, o del suo momento angolare, o entrambi.

Consideriamo adesso la situazione opposta: modifichiamo Q ed S di un buco nero (facendo collassare al suo interno una particella) e vediamo come viene modificata la sua massa. Possiamo far crescere la massa del buco nero a nostro piacimento facendo collassare particelle a massa \dot{m} sempre maggiore. Esiste tuttavia un limite inferiore: vediamo come calcolarlo.

Poiché cerchiamo il dM minimo, dobbiamo scrivere l'energia minima (in base alla prima delle (73)) per certi e ed L_z fissati. La nostra particella che collassa passerà necessariamente per l'orizzonte (dove, ricordiamo, $r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$ e $\mathbf{J} = \mathbf{p} / 2$). Calcoliamo l'energia minima in questo punto tenendo presente che, per una qualsiasi particella con massa a riposo \dot{m} e orbita fissa (cioè r e \mathbf{J} fissi), l'energia è minima quando $p^r = p^J = \dot{m} = 0$. Andiamo pertanto a valutare la formula (66a) sulla base delle condizioni imposte:

$$p^r = 0$$

$$p^J = 0$$

$$\dot{m} = 0$$

$$r = r_+$$

$$\ddot{A} = 0$$

$$\mathbf{a} = (r_+^2 + a^2)^2$$

$$\mathbf{b} = (L_z a + eQ r_+) (r_+^2 + a^2)$$

$$\mathbf{g} = (L_z a + eQ r_+)^2$$

$$E_{\min} = \frac{(L_Z a + e Q r_+) (r_+^2 + a^2) + \sqrt{(L_Z a + e Q r_+)^2 (r_+^2 + a^2)^2 - (L_Z a + e Q r_+)^2 (r_+^2 + a^2)^2}}{(r_+^2 + a^2)^2}$$

$$E_{\min} = \frac{(L_Z a + e Q r_+)}{(r_+^2 + a^2)} \quad (74)$$

Tenendo presenti ora le equazioni (73), e formulando la loro versione differenziale

$$\begin{aligned} dM &= E \\ dQ &= e \\ dS &= L_Z \end{aligned} \quad (75)$$

la (74) diventerà

$$dM_{\min} = \frac{a dS + r_+ Q dQ}{r_+^2 + a^2} \quad (76)$$

che esprime l'incremento minimo d'energia in corrispondenza di dS e dQ noti. Generalizzando:

$$dM \geq \frac{a dS + r_+ Q dQ}{r_+^2 + a^2} \quad (77)$$

consideriamo ora che: $S = aM$ e, in una varietà di Kerr-Newman estrema (dove $M^2 = a^2 + Q^2$) $r_+ = M$, allora:

$$\begin{aligned} dM &\geq \frac{aM da + MQ dQ}{M^2 + a^2} \\ MdM &\geq ada + QdQ \end{aligned} \quad (78)$$

ovverosia:

$$M^2 \geq a^2 + Q^2 \quad (79)$$

La formula (79) è del tutto generale, come del tutto generale era la (66a) da cui è stata dedotta. A partire da questa, possiamo distinguere alcuni casi particolari.

Se $M^2 = a^2 + Q^2$ avremo quella che si chiama una “geometria di Kerr-Newman estrema”, come abbiamo già detto.

Se $Q=0$, avremo un “buco nero di Kerr”, vale a dire un buco nero privo di carica e in rotazione su sé stesso. La condizione (79), in questo caso, diventerà $M^2 \geq a^2$ (o $M^2 = a^2$ in caso di situazione estrema).

Se $a=0$ mentre M e Q sono $\neq 0$, avremo un buco nero di “Reissner-Nordstrom” e la condizione di esistenza sarà $M^2 = Q^2$.

Infine, se $Q=0$ ed $a=0$ ritorniamo nella situazione, che già conosciamo, del “buco nero di Schwarzschild”: un buco nero statico e privo di carica (vedi paragrafo 3.1.1).

Se ora, come nel paragrafo 3.1.1.1, desiderassimo calcolare il raggio dell’ultima orbita stabile in base al potenziale effettivo ricavato dalla (71), dovremmo incorrere in calcoli molto complessi. Ci limitiamo in questa tesi a presentare, nella **Figura 9**, la soluzione grafica per una delle situazioni particolari: il buco nero di Kerr estremo (si veda Misner, Thorne e Wheeler, 1973).

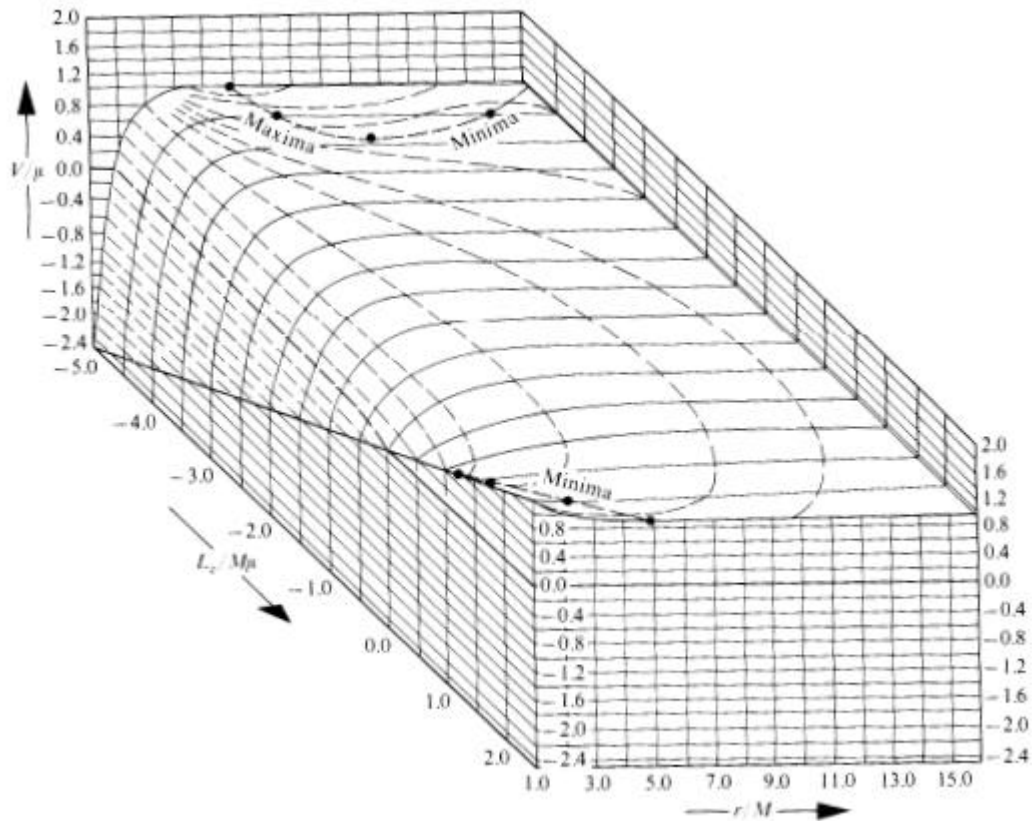


Figura 9 Potenziale effettivo (per unità di massa) risentito da una particella di prova, in prossimità di un buco nero di Kerr estremo non carico (quindi con $a=M$) in funzione dei rapporti $L_z/M\mu$ e r/M .

Precisiamo, infine, che dall'equazione (66a) è sempre possibile ottenere la formula (59) che avevamo ricavato nel paragrafo precedente per un buco nero di Schwarzschild, semplicemente annullando la carica e il momento angolare:

$$Q=0$$

$$a=0$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr$$

$$(67a) \Rightarrow \mathbf{a} = r^4$$

$$(68a) \Rightarrow \mathbf{b} = 0$$

$$(69a) \Rightarrow \mathbf{g}_0 = -r^2 L_z^2 + 2MrL_z^2 - \mathbf{m}^2 r^4 + 2\mathbf{m}^2 Mr^3$$

$$(66a) \Rightarrow V(r) = \frac{\sqrt{-r^4 \left(-r^2 L_z^2 + 2MrL_z^2 - \mathbf{m}^2 r^4 + 2\mathbf{m}^2 Mr^3 \right)}}{r^4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{L_Z^2}{r^2} - 2M \frac{L_Z^2}{r^3} + m^2 - 2m^2 \frac{M}{r}} \\
 \tilde{V}(r) = \frac{V(r)}{m} &= \sqrt{\frac{L_Z^2}{m^2} \frac{1}{r^2} - \frac{2M}{r^3} \frac{L_Z^2}{m^2} + 1 - 2 \frac{M}{r}} = \sqrt{\frac{\tilde{L}_Z^2}{r^2} - 2M \frac{\tilde{L}_Z^2}{r^3} + 1 - 2 \frac{M}{r}} = \\
 &= \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)} = (59)
 \end{aligned}$$

che è esattamente la formula ricavata nel paragrafo 3.1.1.1.

3.2 LA FORMAZIONE DEL SISTEMA BUCO NERO-TORO

Diamo ora una breve discussione dei modelli proposti per spiegare l'origine dello "scenario" nell'ambito del quale i bursts si sviluppano secondo le teorie più accreditate (che vedono i bursts generarsi a partire dai buchi neri).

Il sistema buco nero-toro, fulcro del modello per il motore centrale dei GRBs che analizzeremo, è associato a due possibili origini (van Putten, 2001b):

- Tale sistema può essere generato dalla coalescenza di un sistema binario formato da un buco nero e da una stella di neutroni. Le stelle binarie sono coppie di stelle che ruotano attorno al loro centro di gravità, rimanendo legate reciprocamente dall'attrazione gravitazionale. Quando la stella di neutroni, perdendo momento angolare attraverso emissioni gravitazionali, si avvicina al buco nero, diventa soggetta alle consistenti "forze di marea" di quest'ultimo, che porteranno alla sua "rottura". A seconda delle condizioni, la materia magnetizzata andrà ad iper-accreocere il buco nero o formerà un toro di vita più o meno lunga in sospensione attorno ad esso: se la "rottura" avviene all'interno dell'ultima orbita stabile del buco nero, i residui della stella di neutroni collasseranno rapidamente ad accrescerlo; se

invece avviene all'esterno, la materia si distribuirà sottoforma di un compatto toro di accrescimento in rotazione attorno ad esso (vedi **Figura 10**).

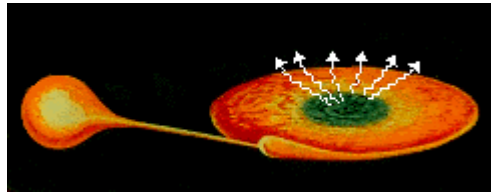


Figura 10 Il collasso di un sistema binario composto da un buco nero ed una stella di neutroni.

- Il secondo scenario per la formazione del sistema buco nero-toro è il cosiddetto “scenario ad ipernova” (illustrato da Paczyński, 1997). Esso procede dal collasso gravitazionale di una giovane stella massiva, inizialmente parte di un sistema binario, dotata di elevato momento angolare. Il collasso darà luogo ad un buco nero centrale ed una struttura toroidale ad esso esterna, accoppiati da un forte campo magnetico dell'ordine di 10^{15} gauss. Questo campo magnetico supera di un fattore $\sim 10^3$ quello che caratterizza una stella di neutroni. Pertanto, anche il trasporto di energia ad esso associato, risulterà molto elevato. Tanto elevato da portare il sistema ad esplodere emettendo energia in quantità superiore a quella emessa da una supernova. Per questo motivo il fenomeno prende il nome di ipernova.

Con entrambe le soluzioni proposte, sia che il toro sia il residuo di una stella di neutroni sia che si generi a partire da una giovane stella massiva, si perviene alla conclusione che in esso permarrà parte della magnetizzazione della stella d'origine, particolare molto importante per lo svolgersi dei processi fisici coinvolti nel nostro modello.

3.3 LA DISPOSIZIONE DELLE LINEE DI CAMPO MAGNETICO IN UN SISTEMA BUCO NERO-TORO

Come si è detto, il toro di accrescimento, circostante il buco nero, è costituito da materiale barionico magnetizzato. Diamo ora un quadro della complessa disposizione spaziale delle linee di campo magnetico che coinvolgono i due corpi e i fenomeni legati a questa particolare distribuzione.

Nella **Figura 11** troviamo una visione schematica della magnetosfera circostante il sistema buco nero-toro, osservata in sezione poloidale. Il toro supporterà tre famiglie di linee di flusso: la prima collega la sua faccia esterna con l'infinito (sono pertanto linee aperte), la seconda collega la sua faccia interna con il buco nero, la terza è costituita da una serie di linee di flusso "inattive" che, partendo dalla superficie interna del toro, si richiudono sulla superficie stessa dopo aver descritto un'orbita chiusa.

Il buco nero, invece, in presenza del campo magnetico esterno generato dal toro (di magnetizzazione \mathbf{m}_t), produrrà un tubo di linee di flusso aperto verso l'infinito e supportato dal momento magnetico d'equilibrio \mathbf{m}_H^e che esso viene indotto ad assumere in tali condizioni (vedi par 3.4.1).

Quanto ci preme puntualizzare è che la differenza fra i diversi "canali" con cui il sistema, nel suo complesso, alimenta le emissioni energetiche che andiamo ad ipotizzare, è associata a diverse famiglie di linee di flusso: secondo quanto teorizzato da van Putten (2001a), avremo, in particolare, un'emissione leptonica da parte del buco nero e diversi tipi di radiazione da parte del toro (vedi prossimo capitolo).

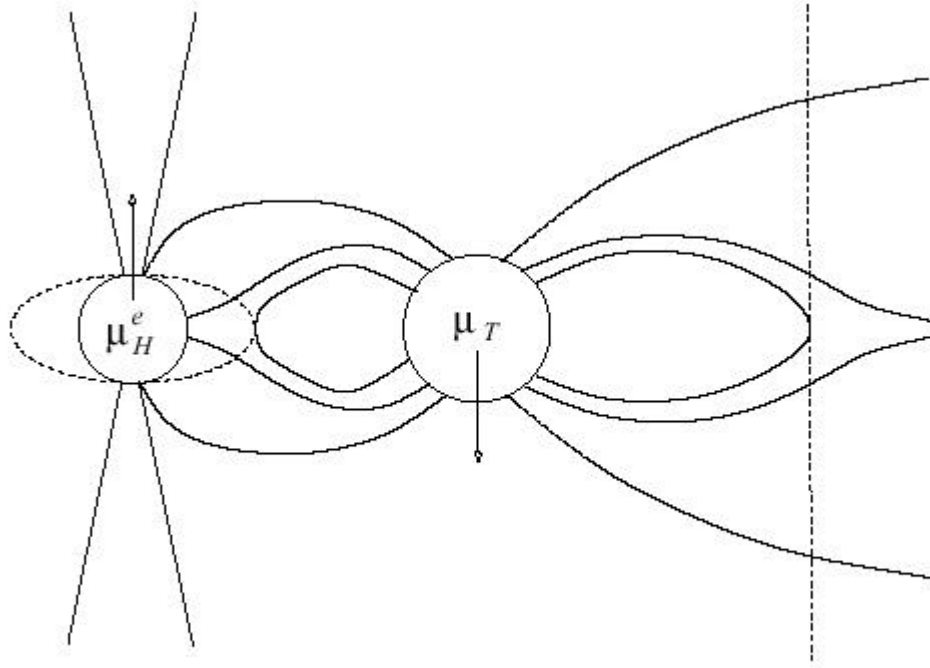


Figura 11. Visione schematica delle linee di campo magnetico in un sistema buco nero-toro secondo una sezione poloidale. Si noti che il toro supporta linee aperte verso l'infinito, linee chiuse che lo relazionano al buco nero e linee "inattive" che descrivono orbite chiuse. Il buco nero invece supporta un tubo collimato di linee di flusso, dovute all'induzione, in presenza della magnetosfera, di un momento magnetico d'equilibrio \mathbf{m}_H^e .

Consideriamo ora, in particolare, come i due corpi (buco nero e toro) interagiscano fra di loro. Il campo magnetico coinvolto dalla parte di linee di campo che li uniscono farà da tramite per un trasporto di energia dal buco nero (il cui momento angolare funge da "serbatoio" energetico) alla faccia più interna del toro, prolungandone la vita. D'altro canto, un fenomeno competitivo verrà ad istaurarsi nella faccia più esterna, dove "venti magnetici" tenderanno, assieme ad emissioni radiative, a disperderne l'energia.

E' noto (vedi Thorne, Price e Macdonald, 1986) che la superficie d'orizzonte di un buco nero rotante non è sferica (come quella prevista per un buco

nero di Schwarzschild) ma più o meno appiattita, a seconda della velocità con cui esso precede. Quando il buco nero entra in contatto con la magnetosfera esterna nel quale è immerso, esso tenderà a perdere il suo momento angolare. Verrà alimentata, in questo modo, una perdita di energia che seguirà la formula (vedi nuovamente Thorne, Price e Macdonald, 1986):

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{2}{3} a (BM \sin \mathbf{g})^2 \quad (80)$$

dove \mathbf{g} indica l'angolo formato dalla direzione di \mathbf{J} con la direzione del campo magnetico.

Poniamo:

$$\Phi(B) = 2pA$$

(come in van Putten, 2001a) indicando con A il flusso di campo magnetico (a meno di un fattore costante).

La (80), trascurando le costanti e considerando le unità geometriche, diventerà:

$$\frac{dJ}{dt} = \Omega A^2 \quad (81)$$

Adattando la perdita di energia da parte del buco nero al nostro caso specifico, dovremo operare un paio di accorgimenti: innanzitutto la \dot{U} che compare nella (81) dovrà tener conto del fatto che non soltanto il buco nero, ma anche il toro che supporta la magnetosfera, ruota, pertanto la velocità angolare dovrà essere sostituita con una velocità angolare relativa $\Omega_H - \Omega_T$; in secondo luogo, il campo magnetico interessato nel processo di trasferimento d'energia fra i due corpi non coinvolgerà tutto il campo B supportato dal toro, ma soltanto quella frazione $f_H B$ che lo mette in comunicazione col buco nero. (Chiameremo invece f_W la frazione di B dispersa lungo le linee aperte che vanno all'infinito).

Se riscriviamo quindi la (81) considerandola come momento di forza che il toro riceve dal buco nero, scriveremo:

$$\mathbf{t}_+ = (\Omega_H - \Omega_T) f_H^2 A^2 \quad (82)$$

Analogamente, la perdita di energia dal toro sottoforma di “venti magnetici”, alimentata dalle linee aperte che questo supporta, seguirà la legge:

$$\mathbf{t}_- = \Omega_- f_w^2 A^2 \quad (83)$$

dove abbiamo indicato con Ω_- la velocità angolare della faccia più esterna del toro, l'unica coinvolta nel processo.

Il momento di forza \mathbf{t}_+ compenserà, oltre a \mathbf{t}_- , l'ulteriore momento opposto \mathbf{t}_{rad} , relativo alla perdita di energia per via radiativa. L'equilibrio fra \mathbf{t}_+ , \mathbf{t}_- e \mathbf{t}_{rad} darà luogo allo stato di “sospensione della crescita” responsabile (secondo van Putten e Ostriker, 2001) della creazione dei GRBs lunghi (vedi prossimo capitolo).

3.4 L'EMISSIONE LEPTONICA DAL BUCO NERO

3.4.1 Momento magnetico d'equilibrio di un buco nero

Com'è noto, un buco nero non dotato di una carica intrinseca non può alimentare, in sé, un campo elettromagnetico proprio. Tuttavia un buco nero di Kerr (cioè scarico e in rotazione su sé stesso), immerso in un campo magnetico B , parallelo al suo asse di rotazione, è in grado di acquistare carica e deformare le linee di forza, ad esso circostante, attirandole a sé. Questo è proprio il caso del nostro buco nero, immerso nella magnetosfera propria del toro.

Andiamo a considerare, in concreto, come questa influenzerà lo stato di energia minima (quindi quello più stabile) del buco nero, seguendo quanto illustrato da Wald (1974).

L'energia del buco nero, in un generico momento, è:

$$\mathbf{e} = q \left(\frac{Q}{2M} - \frac{BJ_H}{M} \right) \quad (84)$$

in cui Q sarà la carica del buco nero, M la sua massa, J_H il suo momento angolare, B il campo magnetico poloidale medio, e q la carica di una particella collocata ad $r=2M$.

Immerso in questo campo magnetico prodotto dal toro, il buco nero reagirà caricandosi fino ad un valore limite corrispondente all'energia minima, ovvero lo stato d'equilibrio (che indicheremo con l'apice e):

$$\frac{\partial e^e}{\partial q} \cong \frac{Q^e}{2M} - \frac{J_H}{M} B = 0$$

$$\frac{Q^e}{2M} = \frac{J_H}{M} B$$

La carica d'equilibrio sarà pertanto:

$$Q^e = 2J_H B \quad (85)$$

Finora non abbiamo ancora mai introdotto la condizione che il buco nero sia in rotazione su sé stesso. Se il buco nero è di questo tipo, sarà vincolato dalla condizione di Kerr: $J_H \leq M^2$ (come si deduce dalla formula (79)). Per cui, dalla (85) dedurremo che sarà:

$$\frac{Q^e}{M} \leq 2BM$$

Quest'equazione in unità geometriche si può riscrivere, in unità di massa solare e gauss come

$$\frac{Q^e}{M} \leq 2BM = 1,7 \times 10^{-20} (M/M_\odot) B \text{ (gauss)}$$

che ci da, per il rapporto carica su massa, dei valori sempre molto al di sotto di 1.

Approssimiamo quindi la (85) come:

$$Q^e \cong J_H B \quad (86)$$

Ora, poiché il momento magnetico del buco nero si scrive come:

$$\mathbf{m}_H = QJ_H / M$$

(come è dimostrato da Wald, 1974), all'equilibrio avremo:

$$\mathbf{m}_H^e \cong \frac{J_H}{M} B J_H \quad (87)$$

Introducendo, infine, il momento angolare specifico del buco nero $a = J_H / M$:

$$\mathbf{m}_H^e \cong a B J_H \quad (88)$$

che risulta essere il momento magnetico d'equilibrio del buco nero. Quest'ultimo ha il duplice effetto di mantenere un forte accoppiamento con il toro e sostenere un tubo di flusso magnetico parallelo all'asse di rotazione del buco nero, attraverso il quale avviene un'emissione di leptoni ultrarelativistici (si veda, ad esempio van Putten, 2001c).

3.4.2 Perdita di momento angolare ed emissione di particelle dal buco nero

Nei paragrafi precedenti, abbiamo visto come avviene la formazione e la distribuzione reciproca nello spazio del sistema costituito da un buco nero e un toro, e come quest'ultimo supporti una magnetosfera che avvolge ed influenza il primo.

In accordo con il teorema di Rayleigh ogni corpo rotante ha la tendenza a liberarsi del suo momento angolare; i buchi neri non fanno eccezione. E' possibile, quantitativamente, valutare come questo avvenga a partire dalla prima legge della termodinamica. Vediamo in che modo.

Consideriamo un buco nero:

sia M la sua massa,

J_H il suo momento angolare,

\dot{U}_H la sua velocità angolare (connessa a J_H attraverso la formula classica

$$\Omega_H = \frac{J_H}{I} \quad (89)$$

con I = momento d'inerzia del buco nero)

T_H = temperatura di orizzonte e

S_H = entropia.

In base alle grandezze definite, andiamo a riscrivere la prima legge della termodinamica:

$$dU = TdS - p dV \quad (90)$$

L'energia interna, nella (90), si può riscrivere anche come $dU = d(Mc^2)$, oppure (ponendo $c=1$) $dU = dM$. Per quanto riguarda invece la variazione di energia cinetica $dT = -p dV$, dobbiamo tener presente l'equazione classica del moto di un corpo rigido $T = \frac{1}{2} I \Omega_H^2$ che diventa $dT = I \Omega_H d\Omega_H$ ma (poiché $dJ_H = I d\Omega_H$) allora: $dT = -p dV = \Omega_H dJ_H$.

La (90) si scriverà quindi come:

$$dM = \Omega_H dJ_H + T_H dS_H \quad (91)$$

(vedi van Putten e Ostriker, 2001).

La formula (91) esprime così la variazione di massa del buco nero dM , ovvero la massa del proiettile espulso. Se definiamo momento angolare specifico di un corpo il rapporto fra il momento angolare e la massa del corpo cui esso è associato, avremo che:

il momento angolare specifico del buco nero è:
$$a = \frac{J_H}{M} \quad (92)$$

il momento angolare specifico della particella irradiata è:
$$a_p = \frac{dJ_H}{dM} \quad (93)$$

Possiamo ora fare le seguenti osservazioni:

$$a_p = \frac{dJ_H}{dM} = (\text{andando a sostituire con la (93)}) = \frac{dJ_H}{\Omega_H dJ_H + T_H dS_H}$$

ma, tenendo conto che il buco nero subisce una perdita di momento angolare (quindi $dJ_H \leq 0$), che T_H è una temperatura e quindi è sempre ≥ 0 , e che per l'entropia $dS_H \geq 0$, avremo:

$$a_p = \frac{dJ_H}{dM} = \frac{dJ_H}{\Omega_H dJ_H + T_H dS_H} \geq \frac{1}{\Omega_H}$$

ma , poiché $\Omega_{MAX} = (2M)^{-1}$ è la velocità angolare limite di un buco nero di massa M (vedi Hawking, 1976), allora:

$$a_p = \frac{dJ_H}{dM} = \frac{dJ_H}{\Omega_H dJ_H + T_H dS_H} \geq \frac{1}{\Omega_H} \geq 2M > M$$

infine, considerando che per una massa M_H , deve essere che $J_H \leq GM_H^2 / c$ (vincolo di Kerr, vedi par 3.1.2.1)

$$a_p = \frac{dJ_H}{dM} = \frac{dJ_H}{\Omega_H dJ_H + T_H dS_H} \geq \frac{1}{\Omega_H} \geq 2M > M \geq \frac{J_H}{M} = a \quad (94)$$

In conclusione, dalla formula (94), deduciamo che il momento angolare specifico della particella irradiata è maggiore di quello del buco nero stesso, quindi, durante l'emissione di una particella, la situazione energeticamente più conveniente è quella che vede gran parte del momento angolare totale portata via, assieme ad una piccola massa, dal proiettile. Questo dimostra come il buco nero alimenti una luminosità isotropa sfruttando l'energia associata alla sua rotazione.

3.4.3 L'emissione dei GRBs

Quando il buco nero entra in contatto con la magnetosfera esterna nel quale è immerso, e che è sostenuta dal toro, si viene a creare un tubo di linee di flusso aperto, a partire dal buco nero, sostenuto dal momento magnetico d'equilibrio m_H^f introdotto nel paragrafo 3.4. Questo tubo di flusso avrà la forma indicata in **Figura 12**.

Il frame dragging prodotto dalla rotazione del buco nero introdurrà una differenza di potenziale fra le due superfici 1 e 2 in figura, generando correnti di carica su scale molto ampie (vedi van Putten, 2001a). Queste correnti trasporteranno leptoni lungo il tubo di flusso aperto parallelo all'asse di rotazione del buco nero. La

magnetosfera esterna interverrà su questo flusso separandone le cariche e favorendo, pertanto, un flusso di elettroni ed uno di positroni di verso opposto. Proprio questi flussi leptonici sono suggeriti da van Putten come input per l'emissione di GRBs secondo il "fireball model".

L'introduzione di un tubo di linee di flusso, che "incanala" la fuoriuscita di leptoni, risolverebbe il paradosso secondo il quale i buchi neri di Kerr (attualmente le sorgenti più probabili dei GRBs) emettono la loro energia in ogni direzione, mentre i GRBs risultano essere collimati.

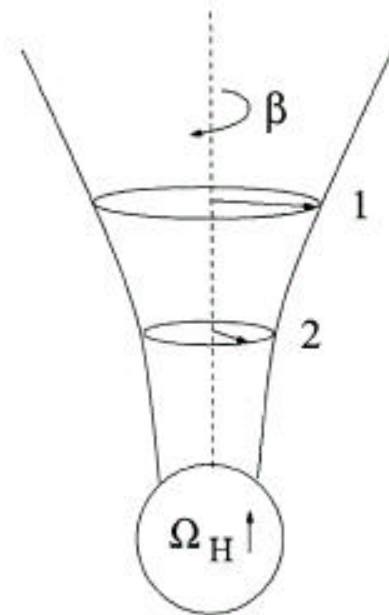


Figura 12. Azione del frame-dragging \mathbf{b} sulle superfici di flusso magnetico sostenute dal toro. Verrà indotta una differenza di potenziale (dipendente linearmente da \mathbf{b} e dal campo magnetico) che induce un flusso leptonico lungo l'asse di rotazione del buco nero, innescando in questo modo il modello "fireball" che darebbe luogo ai GRBs.

La distribuzione bimodale dei GRBs viene giustificata, nel modello buco nero-toro, associando la durata del burst alla durata del sistema stesso. Quando nel sistema permane uno stato di equilibrio fra il buco nero ed il toro (stato che

chiameremo “sospensione della crescita” del buco nero e che assoceremo, come si vedrà nel paragrafo 4.1, ad una sua rapida rotazione) il flusso di leptoni durerà qualche decina di secondi. Se invece il toro collasserà rapidamente nel buco nero (stato che chiameremo di “iper-crescita” del buco nero e che sarà dovuto ad una lenta rotazione di quest’ultimo) avremo una vita molto breve del sistema e, pertanto, un’emissione leptonica di breve durata (vedi van Putten e Ostriker, 2001).

Oltre alla bimodalità della distribuzione temporale, il modello buco nero-toro si accorda con i risultati sperimentali per altri importanti fattori: per l’origine cosmologica del fenomeno, per un’emissione energetica in accordo con quella ufficialmente riconosciuta ai bursts, per la previsione di un fascio leptónico collimato (con un angolo di apertura attorno ai 35° , vedi van Putten, 2001d) e per la possibilità di costituire una “sorgente ripetuta” di GRBs, se assumiamo che, dopo il collasso del toro, il buco nero possa ripetere il processo partendo dai residui di materia ad esso circostanti.

CAPITOLO 4

PRODUZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI

Come abbiamo visto anche nel paragrafo 3.2, un buco nero in rapida rotazione (che proietta il sistema buco nero-toro in uno stato di “crescita sospesa”) supporta un tubo di linee di campo magnetico parallelo al suo asse di rotazione e altre che si collegano al toro circostante. Quest’ultimo, a sua volta, supporterà linee di campo aperte verso l’infinito (vedi **Figura 13**).

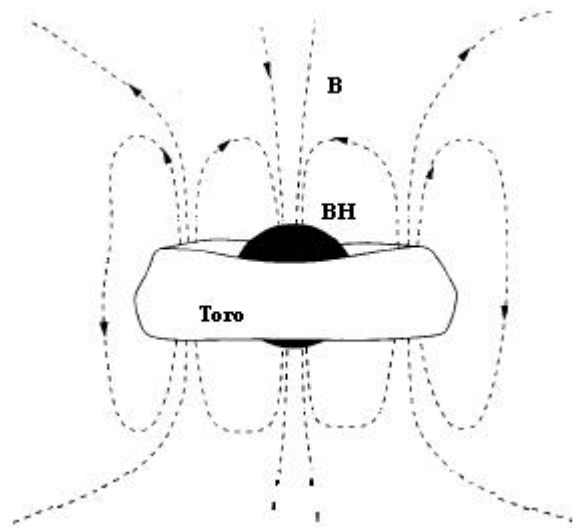


Figura 13. Schematica disposizione delle linee di campo magnetico attorno ad un sistema buco nero-toro nello stato di “crescita sospesa”.

Il buco nero che, immerso nella magnetosfera del toro, si stabilizzerà su di un valore di momento magnetico d'equilibrio (vedi paragrafo 3.4.1), produrrà un'emissione di leptoni a velocità ultrarelativistiche, che saranno rilasciati seguendo il tubo di campo magnetico.

Attraverso le linee di campo che si andranno a chiudere sulla superficie interna del toro, invece, il buco nero cederà luminosità a quest'ultimo, in analogia a quanto avviene nelle pulsar. La luminosità, quindi, verrà poi sfruttata dal toro per alimentare la radiazione (verso l'esterno del sistema) che gli consente di mantenere lo stato di crescita sospesa. Questa radiazione si suppone essere rilasciata attraverso diversi canali "invisibili": radiazione gravitazionale, venti barionici e forse emissione di neutrini. Un'eventuale osservazione sperimentale dei flussi attraverso questi diversi canali sarebbe la prova dell'attendibilità del modello buco nero-toro.

Analizziamo quindi, più da vicino, il fenomeno che consente queste emissioni, introducendo innanzitutto lo scenario nel quale esso si svolge: cioè lo stato di "sospensione della crescita" associato ai GRBs lunghi.

4.1 LO STATO DI "SOSPENSIONE DELLA CRESCITA"

Come si è detto nel paragrafo 3.2, il collasso di un sistema binario comporta la nascita di un buco nero e di una struttura a forma toroidale in rotazione attorno ad esso. Quest'ultima risulta formata da gas nei quali permane una magnetizzazione residua. Consideriamo ora in dettaglio la situazione fisica di "crescita sospesa", che mantiene in vita il toro abbastanza a lungo da darci un flusso di radiazione gravitazionale significativo, e che porta alla nascita dei bursts lunghi secondo la trattazione di van Putten (2001d).

L'evoluzione della materia circostante il buco nero, come illustrato da van Putten e Ostriker (2001), dipende in maniera cruciale dai momenti magnetici. In accordo con quanto viene ipotizzato dai due autori, l'esistenza di due tipi di bursts

(brevi e lunghi) si può giustificare ricorrendo ad un modello che li attribuisce (rispettivamente) all’“iper-crescita” e alla “sospensione della crescita” del buco nero, dovute alla sua lenta o rapida rotazione. Vediamo perché.

Se la materia costituente il toro circostante il buco nero fosse soggetta esclusivamente ai venti magnetici prodotti dal campo B che esso supporta, ben presto collasserebbe. Tuttavia, l’intervento da parte del momento di forza positivo prodotto dal buco nero, quando la sua velocità supera un certo valore critico, è in grado di controllare il processo e fermarne il collasso, come andremo fra poco a dimostrare. Quindi: quando la rotazione del buco nero sarà lenta, il valore critico non sarà raggiunto, il toro collasserà velocemente e avremo uno stato di “iper-crescita” del buco nero; quando invece la rotazione sarà più veloce, verrà raggiunto lo stato di “sospensione della crescita”. Il primo stadio ha una vita breve, mentre il secondo è più duraturo. Simulazioni numeriche sono in grado di dimostrare che le durate previste per i due stadi (“iper-crescita” e “sospensione di crescita”) sono del tutto corrispondenti alla durata dei bursts (rispettivamente: brevi e lunghi), rendendo così plausibile il modello.

Il toro si troverà (sempre secondo van Putten e Ostriker, 2001) soggetto ad un’interazione esterna (ad opera del momento di forza \mathbf{t}_- dovuto ai venti che tendono a dissipare il momento angolare nella zona esterna al toro stesso) e un’interazione interna (ad opera del momento di forza \mathbf{t}_+ dovuto alla rotazione del buco nero, come veniva anticipato alla fine del paragrafo 3.3) che tenderà ad impedirne il collasso. A queste dovremo aggiungere un terzo contributo (\mathbf{t}_{rad}) dovuto all’emissione di radiazioni dal toro e che agirà (come \mathbf{t}_-) dalla superficie esterna verso l’infinito, in maniera dissipativa.

Come suggerito in van Putten (2001d), il risultato della competizione sarà, oltre che consentire la “crescita sospesa”, anche quello di produrre lievi oscillazioni della frequenza di rotazione delle due facce del toro attorno a quella prevista dal moto di Keplero (Ω_k). La conseguente produzione di una pressione radiale, indurrà il toro (di raggio maggiore a) ad assumere una forma molto sottile, riducendo al minimo la

distanza d fra le sue due facce. Le velocità angolari corrispondenti alla faccia interna (\dot{U}_+) e a quella esterna (\dot{U}_-) si scriveranno come:

$$\Omega_{\pm} \approx \Omega_K \left(1 \pm \frac{3d}{4a} \right) \quad (100)$$

I due momenti di forza citati (vedi paragrafo 3.3) saranno invece pari a:

$$\mathbf{t}_+ = (\Omega_H - \Omega_T) f_H^2 A^2 \quad (101)$$

come già introdotto con la formula (82), e

$$\mathbf{t}_- = A^2 f_W^2 \Omega_- \quad (102)$$

Ricordiamo che i fattori f_H ed f_W che compaiono nelle (101) e (102) sono, rispettivamente, la frazione di linee di flusso del toro connessa al buco nero e quella che va all'infinito. In generale avremo che la somma $f_H + f_W$ dei due termini darà una frazione compresa fra $\frac{1}{2}$ ed 1. Il rimanente contributo $1 - f_H - f_W$ è dovuto alle linee chiuse inattive del toro (vedi **Figura 11** nel paragrafo 3.3).

Per quanto riguarda il flusso che va dal buco nero al toro, A deve essere:

$$A \approx ad \langle B_J \rangle \quad (*) \quad (103)$$

cioè deve dipendere dalla componente poloidale di B , dal raggio maggiore a del toro e dalla separazione radiale d fra le sue facce esterna ed interna.

In accordo con van Putten (2001d), se vogliamo ora analizzare la nascita dei GRBs lunghi, dovremo sfruttare le (101) e (102) per imporre lo stato di “arresto della crescita”. Bilanceremo pertanto i momenti \mathbf{t}_+ , \mathbf{t}_- e \mathbf{t}_{rad} . Imporremo, analogamente, anche l'equilibrio fra l'energia trasferita (dal toro o verso il toro) per unità di tempo:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_+ = \mathbf{t}_- + \mathbf{t}_{rad} \\ \Omega_+ \mathbf{t}_+ = \Omega_- \mathbf{t}_- + \Omega_T \mathbf{t}_{rad} + P_d \end{cases} \quad (104)$$

in cui:

(*) Con le parentesi angolari indichiamo il campo magnetico mediato nel toro.

$\Omega_{\pm} \approx \Omega_K \left(1 \pm \frac{3d}{4a}\right)$ sono le velocità angolari delle facce interna ed esterna del toro

(come detto in precedenza),

$\Omega_T \approx \Omega_k$ è la frequenza angolare dell'orbita media,

t_{rad} è la parte di momento di forza persa dal toro sottoforma di radiazione

e P_d è il termine che tiene conto della dissipazione che avviene fra la faccia interna e quella esterna del toro.

L'accoppiamento fra la faccia interna ed esterna è da considerarsi dovuto esclusivamente alla parte radiale del campo magnetico B , che agirà su di una superficie pari a $2\delta ah$ (con h altezza del toro). Se chiamiamo B_r la parte radiale del campo magnetico, da un'analisi dimensionale della (104) potremo scrivere che la dissipazione sarà pari a:

$$P_d \approx A_r^2 (\Omega_+ - \Omega_-)^2 \quad (105)$$

dove:

$$A_r = ah \langle B_r^2 \rangle^{1/2} \quad (106)$$

La (106) è la radice quadratica media del flusso irradiato, mediata sull'interfaccia di area $2pah$, fra le due superfici (interna ed esterna) del toro. Quindi, mentre il momento angolare trasportato dal buco nero al toro comprendeva un fattore $\langle B_J \rangle$ (in virtù delle (101) e (103)), il momento angolare trasportato attraverso gli strati interni al toro risulta proporzionale ad un fattore $\langle B_r^2 \rangle^{1/2}$ (attraverso le (105) e (106)). Mentre il primo considera solo $m=0$, il secondo interessa una mediazione su tutti i possibili numeri quantici azimutali m .

Possiamo ora, sempre in accordo con quanto esposto in van Putten (2001d), dare una stima approssimativa del rapporto A_r / A (una stima esatta non può infatti prescindere dalla conoscenza dettagliata della turbolenza all'interno del toro). Scriveremo quindi A_r / A come radice quadrata del numero dei modi azimutali $m=a/d$:

$$A_r / A \approx (a / d)^{1/2} \quad (107)$$

Andiamo ora a sostituire la prima delle equazioni (104) nella seconda, avremo:

$$\begin{aligned} \Omega_+ (\mathbf{t}_- + \mathbf{t}_{rad}) &= \Omega_- \mathbf{t}_- + \Omega_T \mathbf{t}_{rad} + P_d \\ \Omega_T \mathbf{t}_{rad} - \Omega_+ \mathbf{t}_{rad} &= \Omega_+ \mathbf{t}_- - \Omega_- \mathbf{t}_- - P_d \\ (\Omega_T - \Omega_+) \mathbf{t}_{rad} &= (\Omega_+ - \Omega_-) \mathbf{t}_- - P_d \end{aligned} \quad (108)$$

Ricordiamo che:

$$P_d \approx A_r^2 (\Omega_+ - \Omega_-)^2 \quad (109)$$

$$\mathbf{t}_- = A^2 f_w^2 \Omega_- \quad (110)$$

e introduciamo le seguenti approssimazioni:

$$\Omega_- \approx \Omega_T \quad (111)$$

$$\Omega_+ - \Omega_- \approx \frac{3d}{2a} \Omega_T \quad (\text{ottenuta dalla (100)}) \quad (112)$$

$$f_w < 1 \quad (113)$$

Mettendo le (111) e (112) nella (108) avremo :

$$-\frac{3d}{2a} \Omega_T \mathbf{t}_{rad} \approx \frac{3d}{2a} \Omega_T \mathbf{t}_- - P_d$$

andiamo a inserire quindi la (109):

$$-\frac{3d}{2a} \Omega_T \mathbf{t}_{rad} \approx \frac{3d}{2a} \Omega_T \mathbf{t}_- - A_r^2 \left(\frac{3d}{2a} \Omega_T \right)^2$$

$$\Omega_T \mathbf{t}_{rad} \approx \frac{3d}{2a} \Omega_T^2 A_r^2 - \Omega_T \mathbf{t}_-$$

Andiamo ora a sostituire la (110)

$$\Omega_T \mathbf{t}_{rad} \approx \frac{\Omega_T^2 A^2}{2} \left[3 \left(\frac{A_r}{A} \right)^2 \frac{d}{a} \right] - \Omega_T^2 A^2 f_w^2$$

$$\Omega_T \mathbf{t}_{rad} \approx \frac{\Omega_T^2 A^2}{2} \left[3 \left(\frac{A_r}{A} \right)^2 \frac{d}{a} - 2f_w^2 \right]$$

$$\Omega_T \mathbf{t}_{rad} \approx \Omega_T^2 A^2 \left[3(A_r / A)^2 (d / a) - 2f_w^2 \right] \approx \mathbf{a} \Omega_T^2 A^2 \quad (114)$$

Dove (seguendo le notazioni di van Putten, 2001c) abbiamo indicato con \mathbf{a} il fattore:

$$\mathbf{a} = 3(A_r / A)^2 (d / a) - 2f_w^2$$

che (tenendo conto della (107)) è dell'ordine di:

$$\mathbf{a} = 3 - 2f_w^2$$

Ponendo la (114), la (101) e la (102) nella prima delle (104) si ottiene:

$$A^2 f_H^2 (\Omega_H - \Omega_T) = A^2 f_W^2 \Omega_- + \mathbf{a} \Omega_T A^2$$

ma $\Omega_- \approx \Omega_K \approx \Omega_T$

$$f_H^2 (\Omega_H - \Omega_T) = f_W^2 \Omega_T + \mathbf{a} \Omega_T$$

$$f_H^2 \Omega_H = f_H^2 \Omega_T + f_W^2 \Omega_T + \mathbf{a} \Omega_T$$

$$f_H^2 \Omega_H = (f_H^2 + f_W^2 + \mathbf{a}) \Omega_T$$

$$\frac{\Omega_T}{\Omega_H} = \frac{f_H^2}{(f_H^2 + f_W^2 + \mathbf{a})}$$

ma $\mathbf{a} = 3 - 2f_w^2$

$$\frac{\Omega_T}{\Omega_H} = \frac{f_H^2}{(f_H^2 + f_W^2 + 3 - 2f_W^2)}$$

$$\frac{\Omega_T}{\Omega_H} = \frac{f_H^2}{(3 + f_H^2 - f_W^2)} \quad (115)$$

La formula (115) esprime il rapporto fra la frequenza di rotazione del toro e quella del buco nero. Come si ricordava all'inizio del paragrafo, f_H ed f_W sono due frazioni la cui somma è compresa fra $\frac{1}{2}$ ed 1. Pertanto, la differenza dei loro quadrati, nella (115) ci darà un fattore $\ll 3$, quindi trascurabile.

Possiamo affermare dunque che:

$$\Omega_T / \Omega_H \approx f_H^2 / 3 \quad (116)$$

Per un toro sottile, possiamo assumere che $f_H \propto (M / a)^2$ (vedi van Putten, 2001a) e, prendendo per il toro la Ω di Keplero:

$$\Omega_T = \left[\frac{G(M+m)}{a^3} \right]^{1/2} \approx M^{1/2} / a^{3/2}, \text{ in quanto } m \ll M.$$

Dalla (116) avremo:

$$\frac{M^{1/2}}{\Omega_H a^{3/2}} \propto \frac{1}{3} \left(\frac{M}{a} \right)^4$$

$$\frac{1}{\Omega_H} \propto \frac{1}{3} \frac{M^{7/2}}{a^{5/2}}$$

$$a^{5/2} \propto \frac{1}{3} M^{7/2} \Omega_H$$

Ovverosia:

$$a \propto M^{7/5} \Omega_H^{2/5} \quad (117)$$

Con la (117) abbiamo dimostrato che, all'aumentare della velocità angolare del buco nero, il raggio a della struttura toroidale attorno ad esso ha la tendenza a crescere, contrastando in questo modo il fenomeno che lo vedrebbe collassare rapidamente qualora fosse soggetto esclusivamente ai venti magnetici, e dimostrando così la plausibilità della teoria formulata da van Putten e Ostriker (2001).

4.2 CONFRONTO FRA EMISSIONE GRAVITAZIONALE ED ELETTROMAGNETICA DA UN TORO

Il modello di van Putten calcola l'emissione di onde gravitazionali a partire dalla situazione di "crescita sospesa" descritta nel paragrafo precedente. Il fatto di aver imposto questa situazione d'equilibrio ci consente di avere una vita abbastanza prolungata per il sistema, quindi un flusso di radiazione considerevole. Introduciamo un'ulteriore precisazione, senza la quale non sarebbe concepibile avere emissione gravitazionale, supponiamo cioè che la forma della struttura toroidale non sia perfettamente simmetrica rispetto all'asse di rotazione, ma presenti delle piccole

deformazioni della superficie. Questo è plausibile in quanto il toro è soggetto a diversi tipi di tensioni: nella sua parte interna, dove interagisce con il buco nero, e nella sua parte esterna, dove alimenta un flusso, sottoforma di venti magnetici, che assieme alla radiazione tende a dissiparne l'energia (come già esposto nel paragrafo precedente).

Per descrivere la produzione di onde gravitazionali da parte del toro, nelle condizioni di un toro massivo e non assi-simmetrico in rotazione attorno ad un buco nero ancora più massivo, partiremo dalla formula (B5), ricavata in appendice B e tratta da Shapiro e Teukolsky (1983):

$$L_{GW} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^2 m^2 (M + m)}{a^5} \quad (118)$$

La (118) esprime l'energia emessa sottoforma di onde gravitazionali e per unità di tempo, da due masse puntiformi che ruotano l'una rispetto all'altra su di un'orbita circolare. Consideriamo qui M come massa del buco nero e m come massa del toro.

Introduciamo ora la frequenza Ω_T come:

$$\Omega_T^2 = \frac{G(M + m)}{a^3}$$

ovvero:

$$\Omega_T = \left[\frac{G(M + m)}{a^3} \right]^{1/2} \quad (119)$$

e (conformandoci alle notazioni usate in van Putten, 2001e) indichiamo:

$$\mathcal{M} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m + M)^{1/5}} \quad (120)$$

Introducendo le variabili appena definite e passando in coordinate geometriche, la (118) diventerà:

$$L_{GW} \approx \frac{32}{5} \frac{G^{7/3}}{c^5} G^{5/3} \frac{(M + m)^{5/3}}{a^5} \frac{(mM)^2}{(m + M)^{2/3}}$$

$$L_{GW} \approx \frac{32}{5} \frac{G^{7/3}}{c^5} \left[\left(G \frac{(M + m)}{a^3} \right)^{1/2} \frac{(mM)^{3/5}}{(m + M)^{1/5}} \right]^{10/3}$$

$$L_{GW} \approx \frac{32}{5} (\Omega_T \mathcal{M})^{10/3} \quad (121)$$

Se consideriamo ora la massa M del buco nero significativamente maggiore della seconda, potremo operare la seguente approssimazione:

$$\mathcal{M} \approx M \left(\frac{m}{M} \right)^{3/5}$$

la formula (121), quindi, diventerà:

$$L_{GW} \approx \frac{32}{5} (\Omega_T M)^{10/3} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \quad (122)$$

Ricordiamo a questo punto che la formula appena ricavata è valida per una massa m puntiforme che ruota attorno ad M (non c'è pertanto simmetria del sistema rispetto all'asse di rotazione). Se la vogliamo considerare valida invece per un toro, che si sviluppa simmetricamente rispetto alla massa centrale, dobbiamo ammettere che sulla sua superficie siano presenti delle increspature che lo rendano, per questo, non-assisimmetrico: non sarà pertanto tutta la sua massa m , nella (122) a contribuire all'emissione gravitazionale, ma una sua frazione εm . Correggeremo quindi la massa m del toro per un fattore ε in questo modo: $m \rightarrow \varepsilon m$. Avremo, perciò:

$$L_{GW} \approx \frac{32}{5} (\Omega_T M)^{10/3} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \varepsilon^2 \quad (123)$$

Per il toro, tuttavia, si prevede anche un'emissione di tipo elettromagnetico, che, nel modello di van Putten, viene calcolata in analogia all'emissione elettromagnetica di una pulsar. In una pulsar, l'emissione nelle onde radio, è data dalla formula (A5) ricavata in appendice A e tratta da Shapiro e Teukolsky (1983):

$$L_{em} = \frac{B_p^2 R^6 \Omega_p^4}{6c^3} \sin^2 \alpha \quad (124)$$

dove con R indichiamo il raggio della pulsar, con Ω_p la sua frequenza e con α l'angolo formato dal campo magnetico B_p con il momento di dipolo magnetico μ_p . Quest'ultimo, sarà definito (vedi appendice A) come:

$$|\mathbf{m}| = \frac{B_P R^3}{2} \quad (125)$$

Introducendo questa definizione nella formula per L_{em} , avremo:

$$L_{em} = \left(\frac{B_P R^3}{2} \right)^2 \frac{2\Omega_P^4}{3c^3} \sin^2 \mathbf{a}$$

$$L_{em} = \frac{2}{3c^3} \Omega_P^4 \mathbf{m}_P^2 \sin^2 \mathbf{a}$$

Coerentemente alla notazione di van Putten, facciamo ora il passaggio in coordinate geometriche:

$$L_{em} = \frac{2}{3} \Omega_P^4 \mathbf{m}_P^2 \sin^2 \mathbf{a}$$

Se approssimiamo ora $\frac{2}{3} \sin^2 \mathbf{a} \approx 1/\pi$, allora:

$$L_{em} \approx \frac{1}{\mathbf{p}} \Omega_P^4 \mathbf{m}_P^2 \quad (126)$$

Adattando la formula (126) al toro del sistema di van Putten, lasceremo (naturalmente) cadere il pedice P, che sostituirò con T. Andremo ad introdurre, quindi, la condizione di non-simmetria del corpo (analogamente a quanto visto sopra per la radiazione gravitazionale) semplicemente correggendo il momento di dipolo magnetico per il fattore ε , in questo modo: $\mu_P \rightarrow \varepsilon \mu_T$. La radiazione elettromagnetica prodotta quindi da un toro in rotazione con una frequenza Ω_T sarà data da:

$$L_{em} \approx \frac{1}{\mathbf{p}} \Omega_T^4 \mathbf{m}_T^2 \mathbf{e}^2 \quad (127)$$

Una volta espressa la radiazione gravitazionale e quella elettromagnetica prodotta dal toro, risulta significativo valutare il rapporto fra i due tipi di emissione:

$$L_{em} : L_{GW} \approx \frac{1}{\mathbf{p}} \Omega_T^4 \mathbf{m}_T^2 \mathbf{e}^2 \frac{5}{32} \frac{1}{(\Omega_T M)^{10/3}} \frac{M^2}{m^2 \mathbf{e}^2}$$

$$L_{\text{em}} : L_{\text{GW}} \approx \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{5}{32} \frac{\Omega_T^{2/3} \mathbf{m}_T^2}{M^{4/3}} \frac{1}{m^2} \quad (128)$$

$$L_{\text{em}} : L_{\text{GW}} \approx \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{5}{32} \frac{\mathbf{m}_T^2}{M^3} \Omega_T^{2/3} \frac{M^{5/3}}{m^2} \quad (129)$$

A questo punto introduciamo le seguenti considerazioni:

- Sia V_T il volume del toro: $V_T \approx 2\pi^2 r^2 a$ (dove con r indichiamo il raggio della sezione del toro, che supporremo circolare, e che corrisponderà alla semidistanza radiale fra le due facce: $r = d/2$)

- Sia V_H il volume del buco nero: $V_H \approx \frac{4\mathbf{p}}{3} M^3$ (in unità geometriche)

- Se il momento magnetico di una pulsar è:

$$|\mathbf{m}| = \frac{B_P R^3}{2} = \frac{3}{4\mathbf{p}} \frac{B_P}{2} \frac{4\mathbf{p} R^3}{3} = \frac{3}{8\mathbf{p}} B V_P, \text{ in analogia, il momento}$$

$$\text{magnetico del toro sarà: } \mathbf{m}_T = \frac{3}{8\mathbf{p}} B V_T$$

- Sia $E_B \approx \frac{1}{8\mathbf{p}} B^2 V_T$ (nella notazione di Lichnerowich)

In base a queste 4 definizioni, avremo che:

$$\frac{\mathbf{m}_T^2}{M^3} \approx \frac{9}{64\mathbf{p}^2} \frac{B^2 V_T^2}{M^3} = \frac{9}{64\mathbf{p}^2} \frac{8\mathbf{p} E_B}{V_T} \frac{V_T^2}{M^3} = \frac{9}{8\mathbf{p}} E_B \frac{4\mathbf{p}}{3} \frac{V_T}{\frac{4\mathbf{p}}{3} M^3} = \frac{3}{2} E_B \frac{V_T}{V_M}$$

$$\frac{\mathbf{m}_T^2}{M^3} \approx \frac{3}{2} E_B \frac{V_T}{V_M}$$

Introduciamo ora questo fattore nella (129):

$$L_{\text{em}} : L_{\text{GW}} \approx \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{5}{32} \frac{3}{2} E_B \frac{V_T}{V_M} \Omega_T^{2/3} \frac{M^{5/3}}{m^2} \quad (130)$$

$$L_{\text{em}} : L_{\text{GW}} \approx \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{15}{64} E_B \frac{2\mathbf{p}^2 r^2 a}{\frac{4\mathbf{p}}{3} M^3} \Omega_T^{2/3} \frac{M^{5/3}}{m^2} \quad (131)$$

$$L_{\text{em}} : L_{\text{GW}} \approx \frac{45}{128} \Omega_T^{2/3} M^{2/3} \frac{E_B}{m^2} \frac{r^2 a}{M^2} \quad (132)$$

Consideriamo ora come entrambe le distanze r ed a saranno dell'ordine del raggio di Schwarzschild del buco nero, ovverosia: $a \cong 2M$; approssimeremo quindi $r^2 a \approx 8M^3$ e la (132) diventa:

$$L_{\text{em}} : L_{\text{GW}} \approx \frac{45}{16} (\Omega_T M)^{2/3} \frac{E_B}{M} \left(\frac{M}{m} \right)^2 \quad (133)$$

e, trascurando i coefficienti numerici:

$$L_{\text{em}} : L_{\text{GW}} \approx (\Omega_T M)^{2/3} \frac{E_B}{M} \left(\frac{M}{m} \right)^2 \quad (134)$$

La formula (134), ottenuta per un toro di massa m in rotazione con una frequenza $\Omega_T / 2\mathbf{p}$ rispetto ad un buco nero di massa M molto maggiore, esprime il rapporto fra l'energia per unità di tempo emessa dal toro sottoforma di onde elettromagnetiche e l'energia per unità di tempo emessa dal toro sottoforma di onde gravitazionali.

Valutiamo ora, indicativamente, la (134) dopo aver imposto altre due ipotesi:

- Il campo magnetico supportato dal toro sia un campo debole $\Rightarrow E_B/M \approx 10^{-6}$
- Abbiamo detto che la massa del toro deve essere molto minore di quella del buco nero, tuttavia essa non deve scendere al di sotto di una certa soglia, altrimenti l'emissione gravitazionale risulterebbe del tutto trascurabile $\Rightarrow M/m \leq 10^2$.

Ricordiamo infine che, in unità geometriche, $\Omega_T = \left(\frac{M+m}{a^3} \right)^{1/2}$ ma, siccome

$$a \approx M \text{ ed } M \gg m, \Rightarrow \Omega_T \approx \left(\frac{M+m}{M^3} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{1}{M^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{M} \Rightarrow \Omega_T M \approx 1$$

Sotto queste ipotesi, la (134) diventerà:

$$L_{\text{em}} : L_{\text{GW}} \leq 10^{-6} 10^4$$

ovverosia: $100L_{em} \leq L_{GW}$

Quindi: calcolando l'intensità della radiazione gravitazionale ed elettrica emesse dal toro, adattandole dalle formule rispettive valide per una pulsar, concluderemo che, nel sistema buco nero-toro formulato da van Putten, l'emissione di natura gravitazionale domina su quella di natura elettromagnetica per un fattore minore o uguale a 100.

4.3 INTENSITA' DELL'EMISSIONE GRAVITAZIONALE

Dopo aver valutato il rapporto fra le emissioni gravitazionale ed elettromagnetica da parte del toro, ed essere così pervenuti alla conclusione che la prima domina la seconda (vedi paragrafo precedente), è plausibile, in questo contesto, trascurare la radiazione elettromagnetica e considerare τ_{rad} , momento di forza associato alle radiazioni del toro, esclusivamente dovuto a quella gravitazionale. Perciò, per la (114) dimostrata nel paragrafo 4.1, avremo:

$$L_{GW} \approx \Omega_T \mathbf{t}_{rad} \approx a\Omega_T^2 A^2 \quad (135)$$

La luminosità fornita al toro dal buco nero (L_H), si scriverà:

$$L_H = \Omega_H \mathbf{t}_+ = \Omega_H (\Omega_H - \Omega_T) f_H^2 A^2 \quad (136)$$

Per la (101) del paragrafo 4.1.

Calcoliamo adesso il rapporto fra la (135) e la (136):

$$L_{GW} : L_H = \frac{a\Omega_T^2 A^2}{\Omega_H (\Omega_H - \Omega_T) f_H^2 A^2} = \frac{\Omega_T}{\Omega_H} \frac{a\Omega_T}{(\Omega_H - \Omega_T) f_H^2}$$

ma, ricordando ora che $\Omega_T / \Omega_H \approx f_H^2 / 3$ per la (116), avremo:

$$L_{GW} : L_H = \frac{f_H^2}{3} \frac{a\Omega_T}{(\Omega_H - \Omega_T) f_H^2} = \frac{1}{3} \frac{a\Omega_T}{(\Omega_H - \Omega_T)}$$

Ma, ancora per la (116), avremo: $\Omega_H \approx 3\Omega_T / f_H^2$

$$L_{\text{GW}} : L_H = \frac{1}{3} \frac{a\Omega_T}{\left(\frac{3}{f_H^2} - 1\right)\Omega_T} = \frac{1}{3} \frac{a}{\left(\frac{3}{f_H^2} - 1\right)}$$

Ricordiamo, infine, che $a = 3 - 2f_w^2$. Quindi:

$$L_{\text{GW}} : L_H = \frac{1}{3} \frac{3 - 2f_w^2}{\left(\frac{3}{f_H^2} - 1\right)}$$

e passeremo così a quello che è uno dei risultati più importanti ai quali il modello ci porta:

$$L_{\text{GW}} : L_H \approx \frac{1}{3} \quad (137)$$

Nella (137), abbiamo trascurato il fattore $\frac{3 - 2f_w^2}{\left(\frac{3}{f_H^2} - 1\right)}$ in quanto esso fa variare di poco

il fattore 1/3; la (137) risulterà così una buona approssimazione.

Abbiamo dimostrato, quindi, come un terzo della luminosità che il buco nero fornisce al toro vada ad alimentare il flusso di radiazione gravitazionale. Procediamo pertanto a valutare, quantitativamente, quale sarà l'energia associata a tale radiazione.

La massima energia rotazionale che un buco nero di Kerr può fornire è data dalla differenza fra l'energia di massa totale e l'energia di massa irriducibile:

$$E_{\text{rot}} = (M - M_{\text{irr}})c^2 = \left(M_{\text{irr}}^2 + \frac{J^2}{4M_{\text{irr}}^2} \right)^{1/2} c^2 - M_{\text{irr}}c^2 \quad (138)$$

con
$$M_{\text{irr}} = \frac{1}{2} (r_H^2 + a^2)^{1/2} \quad (139)$$

vedi Thorne, Price, MacDonald (1986), e

$$r_+ = \text{orizzonte degli eventi (vedi paragrafo 3.1.2.1)} \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2} \quad (140)$$

Valutiamo ora queste grandezze nel nostro caso. Poiché per un buco nero di Kerr deve essere che $M^2 \geq a^2$ (vedi formula (79) per $Q=0$), risulterà comodo adottare la seguente parametrizzazione (introdotta da van Putten, 1999):

$$\sin \mathbf{I} = a/M$$

per cui:

$$J_H = M^2 \sin \mathbf{I}$$

e la (140) diventerà:

$$r_H = M + \sqrt{M^2 - M^2 \sin^2 \mathbf{I}} = M + M \cos \mathbf{I}$$

e la (139):

$$\begin{aligned} M_{irr} &= \frac{1}{2} \left(M^2 + M^2 \cos^2 \mathbf{I} + 2M^2 \cos \mathbf{I} + M^2 \sin^2 \mathbf{I} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(2M^2 + 2M^2 \cos \mathbf{I} \right)^{1/2} \\ &= M \left(\frac{1 + \cos \mathbf{I}}{2} \right)^{1/2} \\ &= M \cos \frac{\mathbf{I}}{2} \end{aligned}$$

In questa notazione, la formula (138) si scriverà:

$$\begin{aligned} E_{rot} &= \left(M^2 \cos^2 \frac{\mathbf{I}}{2} + \frac{M^4 \sin^2 \mathbf{I}}{4M^2 \cos^2 \frac{\mathbf{I}}{2}} \right)^{1/2} c^2 - Mc^2 \cos \frac{\mathbf{I}}{2} \\ &= Mc^2 \left(\cos^2 \frac{\mathbf{I}}{2} + \frac{4 \sin^2 \frac{\mathbf{I}}{2} \cos^2 \frac{\mathbf{I}}{2}}{4 \cos^2 \frac{\mathbf{I}}{2}} \right)^{1/2} - Mc^2 \cos \frac{\mathbf{I}}{2} \\ &= Mc^2 \left(\cos^2 \frac{\mathbf{I}}{2} + \sin^2 \frac{\mathbf{I}}{2} \right)^{1/2} - Mc^2 \cos \frac{\mathbf{I}}{2} \\ &= Mc^2 (1 - \cos \frac{\mathbf{I}}{2}) \\ E_{rot} &= 2Mc^2 \sin^2 \frac{\mathbf{I}}{4} \end{aligned} \quad (141)$$

Lo stato di crescita sospesa del buco nero, durante il quale andiamo a valutare l'emissione gravitazionale, corrisponde (come si è visto nel paragrafo 4.1) ad

un periodo di rapida rotazione attorno al suo asse. Se consideriamo la rotazione massima che un buco nero di Kerr può raggiungere ($a=M$) $\Rightarrow \sin\delta=1$ per la parametrizzazione introdotta prima $\Rightarrow \delta = \delta/2$ e la (141) darà:

$$E_{rot} = 0,29Mc^2$$

dove con M intendiamo sempre la massa del buco nero. Riscriviamo ora questa formula in funzione della massa solare (M_\odot) rinormalizzandola per un buco nero di massa $7M_\odot$:

$$\begin{aligned} E_{rot} &= 3,7 \cdot 10^{54} (M/7M_\odot) \text{ ergs} \\ &\cong 4 \cdot 10^{54} (M/7M_\odot) \text{ ergs} \end{aligned} \quad (142)$$

Dell'energia rotazionale liberata dal buco nero, una parte andrà ad alimentare un flusso di leptoni secondo le linee di campo parallele al suo asse di rotazione (come introdotto nel paragrafo 3.4.3), mentre un'altra parte si depositerà sul toro. Chiameremo E_H questa frazione di E_{rot} . L'efficienza con la quale l'energia di spin E_{rot} del buco nero si distribuisce sul toro circostante è data (per la prima legge della termodinamica dei buchi neri) dal rapporto \dot{U}_T/\dot{U}_H .

Per quanto riguarda la \dot{U}_T del toro, la approssimeremo (come già fatto in passato) con la normale \dot{U}_K di Keplero:

$$\Omega_T \approx \Omega_K \quad (143)$$

Per quanto riguarda invece \dot{U}_H , andremo a valutarla sfruttando la stessa parametrizzazione ($\sin\delta = a/M$) usata in precedenza. Poiché:

$$\begin{aligned} \Omega_H &= \left(\frac{\partial M}{\partial J_H} \right) \\ M &= \sqrt{\frac{A_H}{16p} + 4p \frac{J_H^2}{A_H}} \\ \Omega_H &= \frac{1}{2} \frac{8pJ_H}{A_H \sqrt{\frac{A_H}{16p} + 4p \frac{J_H^2}{A_H}}} \end{aligned}$$

(vedi Thorne, Price, MacDonald, 1986) dove:

$$A_H = 4\pi(r_+^2 + a^2) \text{ è la superficie d'orizzonte}$$

$$\text{e } r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \text{ è il raggio d'orizzonte.}$$

Nella nostra parametrizzazione in funzione di δ ,

$$J_H = M^2 \sin \delta$$

$$r_+ = M(1 + \cos \delta)$$

$$A_H = 8\pi M^2(1 + \cos \delta)$$

$$\Omega_H = \frac{1}{2} \frac{\sin \delta}{(1 + \cos \delta) \sqrt{\frac{M^2(1 + \cos \delta)}{2} + \frac{M^2 \sin^2 \delta}{(1 + \cos \delta)}}}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{\cos^2 \frac{\delta}{2} M \sqrt{\cos^2 \frac{\delta}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2}}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}}}$$

$$\Omega_H = \frac{1}{2M} \tan \frac{\delta}{2} \quad (144)$$

Valutiamo adesso la (144) nel caso di un buco nero in massima rotazione che, come abbiamo già visto, corrisponde a considerare $\delta = \pi/2$. Questo valore, nella (144) ci fa pervenire ad un valore di $\dot{\Omega}_H$:

$$\Omega_H \approx \frac{1}{2M} \quad (145)$$

Il rapporto fra le frequenze (rispettivamente) del toro e del buco nero, risulterà pertanto:

$$\frac{\Omega_T}{\Omega_H} \approx 2M\Omega_K \quad (146)$$

Poiché, per un'orbita circolare attorno all'equatore di un buco nero di Kerr, la terza legge di Keplero si scrive:

$$\Omega_K = \frac{M^{1/2}}{R^{3/2} + aM^{1/2}}$$

e, in caso di massima rotazione:

$$\Omega_K = \frac{M^{1/2}}{R^{3/2} + M^{3/2}}$$

la (146) diventerà:

$$\frac{\Omega_T}{\Omega_H} \approx \frac{2M^{3/2}}{R^{3/2} + M^{3/2}}$$

$$\frac{\Omega_T}{\Omega_H} \approx \frac{2}{\left(\frac{R}{M}\right)^{3/2} + 1} \quad (147)$$

per un toro di raggio R attorno al buco nero di Kerr di massa M in massima rotazione.

Se prendiamo un valore conservativo di ≈ 0.1 per il rapporto \dot{U}_T/\dot{U}_H (analogamente a quanto svolto in van Putten e Levinson, 2001) allora concluderemo che l'energia E_H che giungerà sul toro sarà soltanto un decimo dell'energia rotazionale totale E_{rot} . Poiché quest'ultima è stata valutata intorno ad un valore di circa $4 \cdot 10^{54}$ ergs (per un buco nero di massa $M \approx 7 M_\odot$, vedi formula (142)), concluderemo che l'energia con la quale il buco nero alimenta il toro è pari a:

$$E_H \cong 4 \cdot 10^{53} \cdot (M/7M_\odot) \text{ ergs} \quad (148)$$

Infine, poiché come abbiamo dimostrato con la formula (137) l'energia dissipata dal toro in radiazione gravitazionale è circa un terzo di quella che gli viene fornita dal buco nero, allora:

$$E_{GW} \cong 10^{53} \cdot (M/7M_\odot) \text{ ergs} \quad (149)$$

Quindi, per un buco nero di massa $M \approx 7 M_\odot^{(*)}$ in accrescimento sospeso, il modello buco nero-toro formulato da van Putten prevede un'emissione gravitazionale di circa 10^{53} ergs per una durata pari a quella di un burst lungo.

(*) Considerazioni astrofisiche portano ad affermare che la distribuzione delle masse dei buchi neri va dalle 4 alle 15 masse solari, pertanto $M \approx 7 M_\odot$ risulta una scelta conveniente.

4.4 FREQUENZE DEL SEGNALE PREVISTO

Abbiamo esaminato fino ad ora un particolare momento della vita del sistema buco nero-toro, la fase di crescita sospesa, durante la quale è prevista una notevole produzione di onde gravitazionali (vedi paragrafo precedente). Per quanto riguarda il fenomeno emissivo, però, è da sottolineare che l'intera evoluzione del sistema buco nero-toro (dalla sua formazione a partire dal sistema binario al suo collasso a formare un semplice buco nero di Kerr) risulta associata ad una produzione di onde gravitazionali: lo stadio legato alla crescita sospesa non è che la fase intermedia del fenomeno.

La formazione del sistema buco nero-toro è preceduta da una fase iniziale (chiamata fase di "chirp") costituita dallo spiraleggiare di un buco nero ed una stella di neutroni nel sistema binario d'origine, con una frequenza via via crescente finché il sistema stesso non collassa completamente sotto l'effetto dell'attrazione gravitazionale. A questa fase è associata una radiazione gravitazionale la cui frequenza cresce nel tempo come $f^{11/3}$ (vedi **Figura 14**), come verrà calcolato nel prossimo paragrafo.

Nel momento del collasso è difficile prevedere quale sarà la dinamica del sistema e l'andamento della curva di emissione ad esso associata; tuttavia, in accordo con quanto formulato da van Putten, è plausibile supporre che, con l'avvicinarsi reciproco delle due stelle del sistema binario, l'intervento delle forze di marea che interessano entrambi i corpi favoriranno la formazione di un buco nero centrale e della distribuzione toroidale attorno ad esso della restante massa. Quando le condizioni fisiche del sistema saranno tali da consentirlo, si formerà lo stadio di crescita sospesa (come descritto nel paragrafo 4.1), durante il quale il toro ruoterà attorno al buco nero con una frequenza confrontabile con quella di Keplero e in approssimazione quasi adiabatica. Durante questa fase (come verrà descritto più approfonditamente nel paragrafo 4.4.2) la frequenza della radiazione gravitazionale emessa dal toro varierà linearmente nel tempo (vedi ancora **Figura 14**).

Quando la crescita sospesa (che, ricordiamo, nel modello di van Putten è associata al verificarsi di un GRB lungo, quindi ha una durata di qualche decina di secondi) viene meno, il toro collasserà rapidamente nel buco nero, provocandone così una vibrazione (“ringdown”, vedi paragrafo 4.4.3). Lo smorzamento finale dell’emissione gravitazionale seguirà pertanto l’andamento smorzato di un oscillatore armonico.

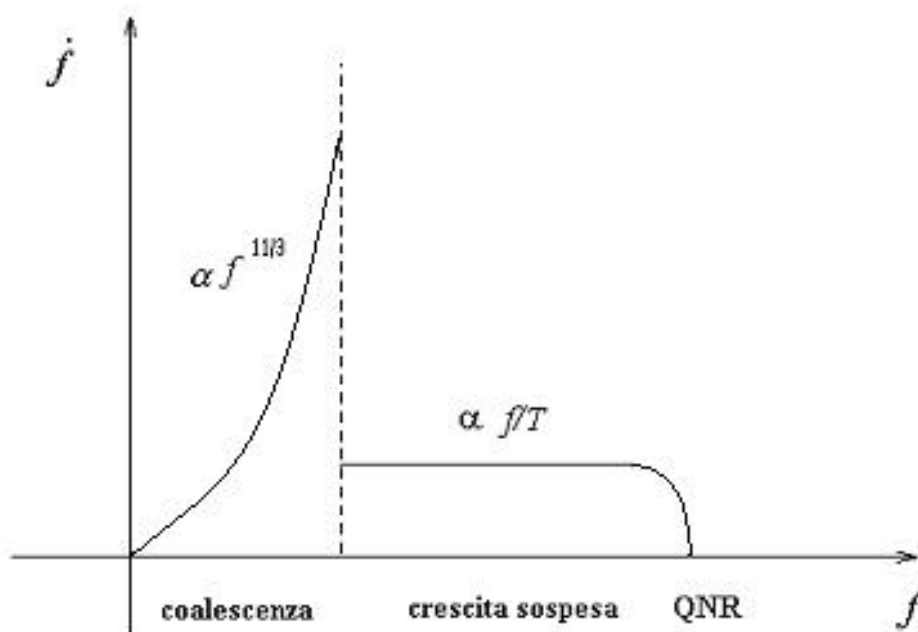


Figura 14. Andamento di \dot{f} in funzione della frequenza f della radiazione gravitazionale emessa dal sistema buco nero-toro prima della sua formazione (coalescenza del “chirp” precursore) e dopo, in uno stato di crescita sospesa contemporaneo all’emissione di un GRB lungo, fino alla fine del fenomeno, alla frequenza QNR (“quasi normal ringing”).

4.4.1 Frequenza del segnale durante la fase di “chirp”

Considereremo la fase di “chirp”, precedente la creazione del sistema buco nero-toro, come una fase quasi adiabatica (la scala temporale con cui varia la radiazione gravitazionale è notevolmente maggiore del periodo orbitale).

Se descriviamo il sistema binario all’origine della formazione della coppia buco nero-toro (costituito probabilmente da un buco nero ed una stella di neutroni), attraverso le due masse $m_1=7M_\odot$ ed $m_2=1.4M_\odot$, distanti fra loro r , la loro velocità di avvicinamento sarà (vedi Landau e Lifšic, 1964):

$$\dot{r} = -\frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^3} = -\frac{\mathbf{a}}{r^3} \quad (150)$$

(dove con \mathbf{a} indichiamo:
$$\mathbf{a} = \frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5}$$
)

Integriamo ora la (150) fra un istante iniziale (che indichiamo con $t = 0$) nel quale la distanza ci è nota (r_i) e un generico istante t nel quale la distanza è $r(t)$:

$$\int_{r_i}^{r(t)} r^3 dr = -\mathbf{a} \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{4} (r(t)^4 - r_i^4) = -\mathbf{a}t$$

$$r(t) = r_i \left(1 - \frac{4\mathbf{a}}{r_i^4} t \right)^{1/4} \quad (151)$$

Chiamiamo ora $t_* \equiv \frac{r_i^4}{4\mathbf{a}}$. La (151) diventerà:

$$r(t) = r_i \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{1/4} \quad (152)$$

La frequenza orbitale media sarà semplicemente la \dot{U} di Keplero (si veda, ad esempio, Peters e Mathews, 1963) divisa per 2δ :

$$f_{orb} = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{r^{3/2}} \quad (153)$$

Se mettiamo ora la (152) nella (153), avremo la frequenza orbitale in funzione del tempo:

$$f_{orb}(t) = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{r_i^{3/2}} \left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{-3/8} \quad (154)$$

Deriviamo quindi la (154):

$$\dot{f}_{orb}(t) = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{r_i^{3/2}} \left(\frac{3}{8t_*}\right) \left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{-11/8} \quad (155)$$

Ricaviamo ora il fattore $\left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{1/8}$ dalla (154):

$$\left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{1/8} = \frac{[G(m_1 + m_2)]^{1/6}}{f_{orb}(t)^{1/3}} \frac{1}{r_i^{1/2} (2p)^{1/3}}$$

che, sostituito nella (155), dà:

$$\dot{f}_{orb}(t) = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{r_i^{3/2}} \left(\frac{3}{8t_*}\right) \frac{[G(m_1 + m_2)]^{-11/6}}{f_{orb}(t)^{-11/3}} \frac{1}{r_i^{-11/2} (2p)^{-11/3}}$$

ossia:

$$\dot{f}_{orb}(t) = \frac{(2p)^{8/3} r_i^4}{[G(m_1 + m_2)]^{4/3}} \left(\frac{3}{8t_*}\right) f_{orb}(t)^{11/3}$$

Andando ora a sostituire, prima la definizione di t_* e poi a , avremo:

$$\dot{f}_{orb}(t) = \frac{3}{2} \frac{(2p)^{8/3} a}{[G(m_1 + m_2)]^{4/3}} f_{orb}(t)^{11/3}$$

$$\dot{f}_{orb}(t) = \frac{96}{5} (2p)^{8/3} \frac{G^{5/3}}{c^5} \frac{m_1 m_2}{[(m_1 + m_2)]^{1/3}} f_{orb}(t)^{11/3}$$

e, ricorrendo nuovamente alla definizione (120) per conformarci alle notazioni usate da van Putten:

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$$

$$\dot{f}_{orb}(t) = \frac{96}{5} (2p)^{8/3} \frac{G^{5/3}}{c^5} \mathcal{M}^{5/3} f_{orb}(t)^{11/3} \quad (156)$$

Ricordiamo, alla fine, che per l'emissione in onde gravitazionali, la frequenza sarà il doppio della frequenza orbitale:

$$f(t) = 2 f_{orb}(t)$$

e possiamo riscrivere la (156) come:

$$\dot{f}(t) = \frac{96}{5} (2p)^{8/3} \frac{G^{5/3}}{c^5} \mathcal{M}^{5/3} f(t)^{11/3} \quad (157)$$

e avremo quindi l'andamento $\dot{f}(t) \propto f^{11/3}$ descritto dalla prima parte della **Figura 14**.

Analizziamo ora quale sarà la forma del segnale, in funzione del tempo, durante questa prima fase di “chirp precursore”.

Consideriamo il sistema binario iniziale come formato da un buco nero di massa $m_1 = 7M_\odot$ ed una stella di neutroni di massa $m_2 = 1.4M_\odot$, l'energia emessa sarà:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{64M_{rid}^5 G^4}{5c^5 r(t)^5} \quad (158)$$

(si veda, ad esempio, vedi Landau e Lifšic, 1964) dove con M_{rid} intendiamo la massa

ridotta $M_{rid} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 1.17 M_\odot \cong M_\odot$; mentre l'ampiezza sarà

$$h(t) = \frac{1}{w_g} \left(\frac{32pG}{c^3} \frac{1}{4pD^2} \frac{dE}{dt} \right)^{1/2} \cos(\mathbf{j}(t)) \quad (159)$$

nella quale D è la distanza a cui ci poniamo dalla sorgente.

Poiché la (158) si può scrivere anche come:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{64M_{rid}^5 G^4}{5c^5 r(t)^5} = 3.2 \cdot 10^{51} (M_{rid}/M_\odot)^5 \left(\frac{100Km}{r(t)} \right)^5 \frac{ergs}{s}$$

allora, la (159) diventa:

$$h = \frac{1}{w(t)} \left(\frac{8G}{c^3} \frac{dE}{dt} \right)^{1/2} 3 \cdot 10^{-25} \left(\frac{100Mpc}{D} \right) \cos(\mathbf{j}(t))$$

$$= \frac{1}{\mathbf{w}(t)} \left(6.3 \cdot 10^{13} \left(\frac{M_{rid}}{M_{\odot}} \right)^5 \left(\frac{100 Km}{r(t)} \right) \right)^{1/2} 3 \cdot 10^{-25} \left(\frac{100 Mpc}{D} \right) \cos(\mathbf{j}(t))$$

e, tenendo conto della (153):

$$h(t) = 2.2 \cdot 10^{-23} \left(\frac{M_{rid}}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{100 Km}{r(t)} \right) \left(\frac{100 Mpc}{D} \right) \cos(\mathbf{j}(t))$$

$$h(t) = 2.2 \cdot 10^{-23} \left(\frac{M_{rid}}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{100 Km}{r_i} \right) \left(\frac{100 Mpc}{D} \right) \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{-1/4} \cos(\mathbf{j}(t)) \quad (160)$$

dove t_* è, ancora una volta, il tempo finale (quando cioè il sistema arriva all'ultima orbita stabile).

Consideriamo una frequenza iniziale (dalla quale iniziamo ad osservare la coalescenza) pari ad $f_i \cong 70 Hz$, che ci darà una distanza iniziale pari a $r_i \cong 100 Km$.

Come valore di D , considereremo una distanza di $100 Mpc$, non troppo grande per essere accessibile ai moderni rivelatori, e non troppo piccola per darci una frequenza significativa per il fenomeno. (Associando l'emissione di onde gravitazionali all'emissione dei GRBs, dovremmo ammettere che i due fenomeni si verificano con la stessa frequenza; tuttavia è noto che, contrariamente alle onde gravitazionali, i GRBs sono emessi con una certa collimazione che ci consente di vedere in realtà, soltanto una frazione di essi. Assumendo come "fattore di beaming" un valore di circa 500 come quello proposto da Piran e Ayal (2001), per avere una frequenza di qualche evento all'anno dovremmo porci ad una distanza $D \approx 100 Mpc$).

Con queste ipotesi avremo, per la definizione di t_* :

$$t_* = 0.25 \text{ s}$$

Quindi la (160) darà:

$$h(t) = 2.2 \cdot 10^{-23} \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{-1/4} \cos(\mathbf{j}(t)) \quad (161)$$

Infine, la fase $\mathbf{j}(t)$ si ricava in questo modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= 2\mathbf{p}f(t) = 2\mathbf{p} \cdot 2f_{orb}(t) \\ &= 4\mathbf{p} \frac{1}{2\mathbf{p}} \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{r(t)^{3/2}} \end{aligned}$$

ma per la (151):

$$r(t) = r_i \left(1 - \frac{4\mathbf{a}}{r_i^4} t \right)^{1/4}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(t) &= \int \mathbf{w}(t) dt \\ &= 4\mathbf{p} \frac{1}{2\mathbf{p}} \int \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{r(t)^{3/2}} dt = 4\mathbf{p} \frac{1}{2\mathbf{p}} \sqrt{G(m_1 + m_2)} \int \frac{1}{r_i^{3/2} \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{3/8}} dt \end{aligned}$$

ma $\frac{1}{2\mathbf{p}} \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{r_i^{3/2}} = f_{orb}(0) = \frac{1}{2} f_{GW}(0) = \frac{1}{2} f_i$

allora:

$$= 2\mathbf{p}f_i \int \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{3/8}} dt$$

$$\mathbf{j}(t) = 2\mathbf{p}f_i \frac{8}{5} t_* \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{5/8} \quad (162)$$

In realtà la frequenza andrebbe corretta per un fattore $1/(1+z)$, per tenere conto del red-shift. Il valore z è definito in questo modo:

$$z = D \frac{H_0}{c}$$

dove c è la velocità della luce, H_0 è la costante di Hubble ($H_0 = 70 \frac{Km}{s \cdot Mpc}$), e D è la

distanza sorgente-rilevatore. Pertanto, un valore di z di 0.1 corrisponderà ad una distanza di $D \cong 100 Mpc$. Quindi, poiché le distanze che riusciamo a coprire con i più moderni rilevatori non vanno oltre a questa distanza siamo autorizzati, da qui in poi, a trascurare la correzione $1/(1+z)$, che approssimeremo con 1.

Poiché
$$\mathbf{a} = \frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5} \approx 1.02 \cdot 10^{21} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$$

$$r_i = 1.7 \cdot 10^5 \text{ m}$$

e $t_* = 0.25 \text{ s}$

la (162) diventa:

$$\mathbf{j}(t) = \mathbf{j}_0 - 420 \cdot t^{5/8}$$

Il segnale che otterremo, pertanto, sarà

$$h(t) = 2.2 \cdot 10^{-23} \left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{-1/4} \cos(\mathbf{j}_0 - 420 \cdot t^{5/8}) \quad (163)$$

il cui andamento sarà quello illustrato in **Figura 15**.

L'andamento della trasformata di Fourier (H(f)) di questo segnale in funzione della frequenza, invece, sarà dato nella **Figura 16**.

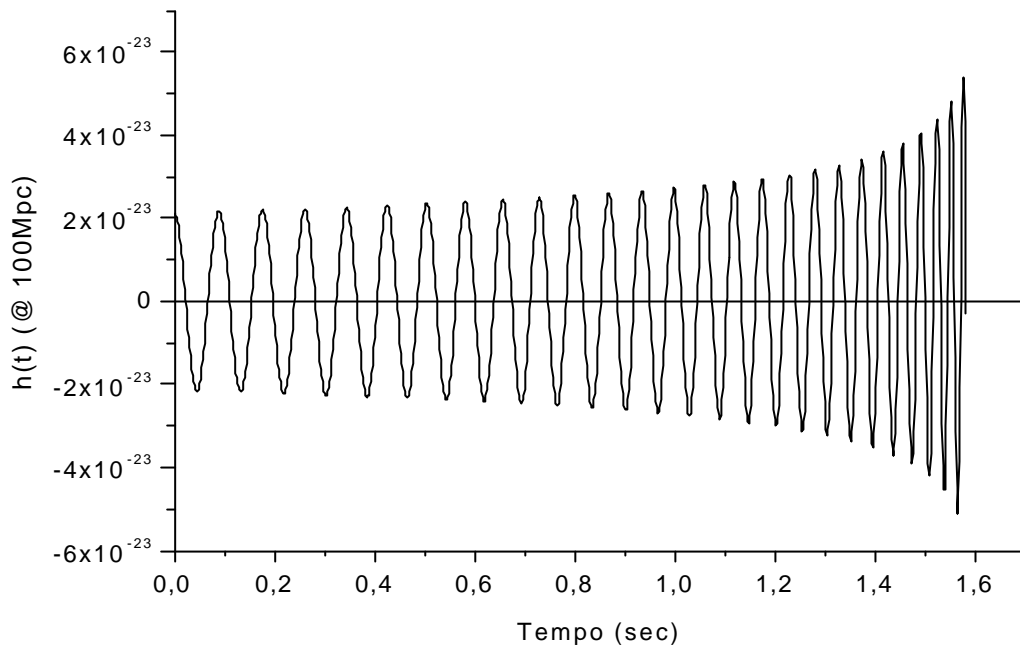


Figura 15. Ampiezza del segnale a $D=100\text{Mpc}$ ottenuta nella fase di “chirp” del sistema binario d’origine, in funzione del tempo. Come masse del sistema binario si sono considerate $m_1=7M_\odot$ ed $m_2=1.4M_\odot$; la frequenza iniziale dalla quale abbiamo iniziato ad osservare il fenomeno è pari a 70Hz . Le stesse condizioni sono utilizzate per tutti i grafici di questo paragrafo.

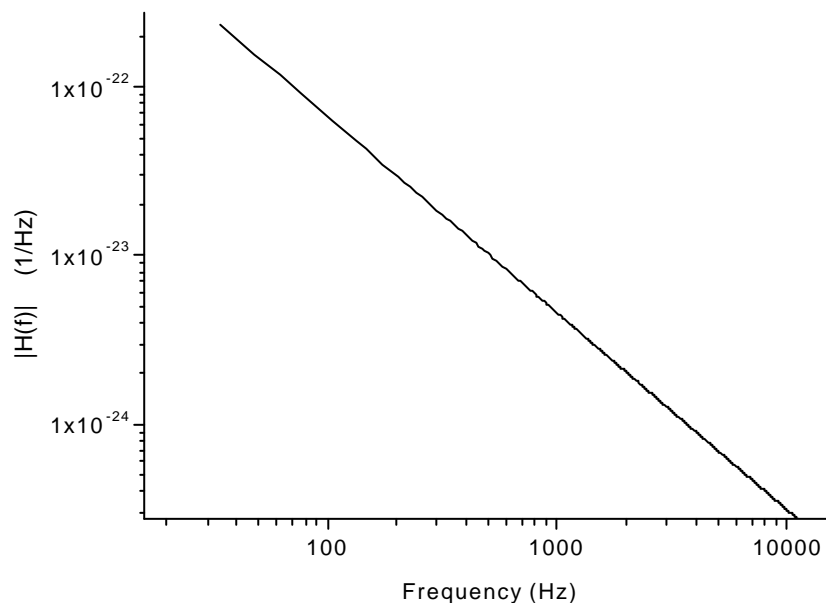


Figura 16. Trasformata di Fourier del segnale durante la fase di “precursor chirp”, in funzione della frequenza.

L'andamento della fase sarà, invece, quello illustrato dalla **Figura 17**:

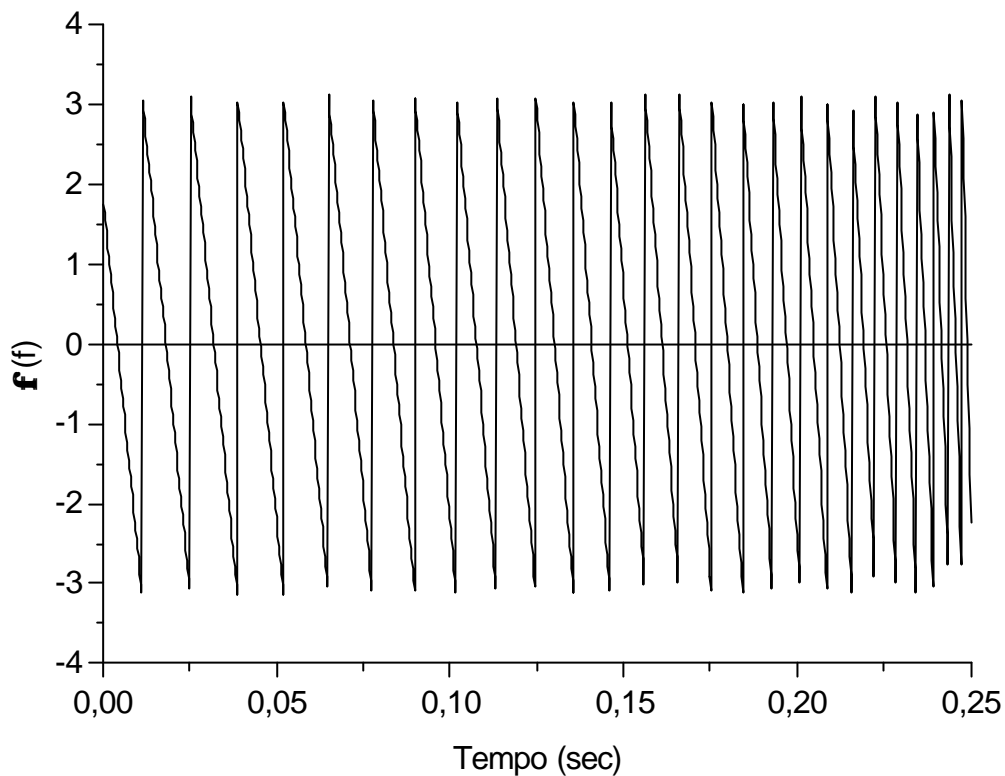


Figura 17. Andamento della fase $\mathbf{j}(t)$, relativa all'emissione di onde gravitazionali da parte del sistema binario, in funzione del tempo.

4.4.2 Frequenza del segnale durante la crescita sospesa

Durante il periodo di crescita sospesa, sappiamo che la frequenza dell'emissione di radiazione gravitazionale, da parte della frazione di materia non assi-simmetrica del toro, sarà il doppio della frequenza caratteristica con cui quest'ultimo ruota su sé stesso. Poiché (come si è detto in precedenza) al primo ordine questa frequenza è approssimabile con quella di Keplero, possiamo affermare che:

$$f(t) = f_0 \approx 2f_K \approx 2 \frac{1}{2p} \sqrt{G \frac{(M+m)}{R^3}} \approx 1-2 \text{ KHz} \quad (164)$$

quando la massa M del buco nero è $M \approx 7M_{\odot}$ e il raggio R del toro oscilla fra $2M$ e $4M$ (in unità geometriche).

Durante la fase di crescita sospesa, la frequenza rimarrà pressoché costante (al prim'ordine) in virtù dell'ipotesi di quasi-adiabaticità, che vedrà il toro spiraleggiare su orbite quasi-circolari attorno al buco nero. Dopo un certo periodo di tempo (che nel nostro modello corrisponderà alla durata di un burst lungo, cioè $\approx 15s$) il toro finirà per collassare completamente nel buco nero. Alla luce di ciò è necessario introdurre una perturbazione alla frequenza f_0 che, al primo ordine significativo, sarà lineare nel tempo:

$$f(t) = f_0 + \alpha f_0 t \quad (165)$$

In base alla (164), in quanto segue, considereremo $f_0 = 1 \text{ KHz}$ e

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 1000 \text{ Hz} \quad (166)$$

Pertanto, l'onda gravitazionale emessa dal toro, in fase di sospensione di crescita, sarà la funzione quasi monocromatica espressa da:

$$h(t) = h_0 \cos\left\{\int [2\pi f_0 (1 + \alpha t)] dt\right\} = h_0 \cos\left\{\int [\omega_0 (1 + \alpha t)] dt\right\} \quad (167)$$

Il fattore α che compare nella formula (167) si può calcolare considerando come, in base alla (165), la frequenza del segnale cresce in maniera lineare nel tempo:

$$\frac{df(t)}{dt} = \alpha f_0 = \text{const.} \quad (168)$$

(l'equazione (168) pertanto, giustifica il ramo orizzontale del grafico di **Figura 14**). Per dt , nella formula appena scritta, dovremo intendere la durata della fase di crescita sospesa (quindi, approssimativamente, $15s$) mentre per df prenderemo il range nel quale la frequenza varia nello stesso periodo. La frequenza iniziale sarà data dalla $f_0 = 1 \text{ KHz}$ espressa dalla (164) mentre, come frequenza finale, assumeremo la frequenza di “quasi-normal mode ringing” (QNR) che il sistema assumerà non appena il toro, collassato completamente nel buco nero, farà oscillare quest'ultimo, e che sarà da valutare attorno ai 3700 Hz (vedi prossimo paragrafo). Avremo perciò:

$$df(t) = f_{QNR} - f_0 = (3700 - 1000)Hz = 2700Hz$$

quindi:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{2700Hz}{15s} = 180Hz^2 = af_0$$

e
$$a \cong 0,1 Hz \quad (169)$$

Quindi la fase si scriverà come:

$$j(t) = \int_0^t w_0(1 + at)dt = w_0t + \frac{1}{2}aw_0t^2 + j_0$$

Per quanto riguarda l'ampiezza h_0 che compare nella formula (167), la calcoleremo nella maniera seguente.

Poiché (vedi nuovamente Landau e Lifšic, 1964):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3}{8pG} 4pD^2 \left(\frac{dh_0}{dt} \right)^2 \quad (170)$$

nel nostro caso,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= (10^{-1}M_\odot c^2)(M/7M_\odot) \frac{1}{15} \frac{joule}{s} \\ &= 1.2 \cdot 10^{45} (M/7M_\odot) \frac{joule}{s} \\ &\approx 10^{52} (M/7M_\odot) \frac{ergs}{s} \end{aligned} \quad (171)$$

(prendendo come energia emessa quella ricavata nella formula (149) del paragrafo 4.3 e un tempo di emissione pari a 15 secondi).

Per quanto riguarda $\frac{dh_0}{dt}$, lo calcoleremo semplicemente dividendo h per il periodo

(ovvero moltiplicando per $2\delta f_0$, dove con f_0 indichiamo la frequenza media della crescita sospesa) quindi:

$$\frac{dh_0}{dt} = 2pf_0 h_0 = 6 \cdot 10^3 h_0 \quad (172)$$

Quindi mettendo le (171) e (172) nella (170) e considerando (con le motivazioni del paragrafo precedente) $D=100\text{Mpc}$, avremo:

$$h_0 = 4.4 \cdot 10^{-24} (M/7M_\odot)^{1/2} \left(\frac{100\text{Mpc}}{D} \right) \quad (173)$$

Il valore qui ricavato per l'ampiezza, è la stima ottimistica ottenuta considerando un'emissione gravitazionale pari a 10^{53} ergs, esso è tuttavia da considerarsi un valore indicativo, passibile di leggere oscillazioni. In particolare, è plausibile ipotizzare segnali di un'ampiezza $h_0 \cong 10^{-23}$ al limite della rilevabilità di un rivelatore gravitazionale quale AURIGA (vedi paragrafo 4.6).

Rappresentando graficamente l'onda gravitazionale descritta dalla formula (167), usando i parametri della (166) e (169), oltre all'ampiezza data dalla (173), otterremo l'andamento descritto in **Figura 18**.

I modelli astrofisica con produzione di onde gravitazionali formulati in precedenza, sostenevano che l'emissione gravitazionale fosse associata a fenomeni di natura impulsiva, che avrebbero dato, nel grafico di **Figura 18**, un profilo "a delta di Dirac".

Se, per gli stessi valori dei parametri \dot{a} e w_0 , calcoliamo la trasformata di Fourier (H) del segnale dato dalla (167), otterremo la curva data in **Figura 19**.

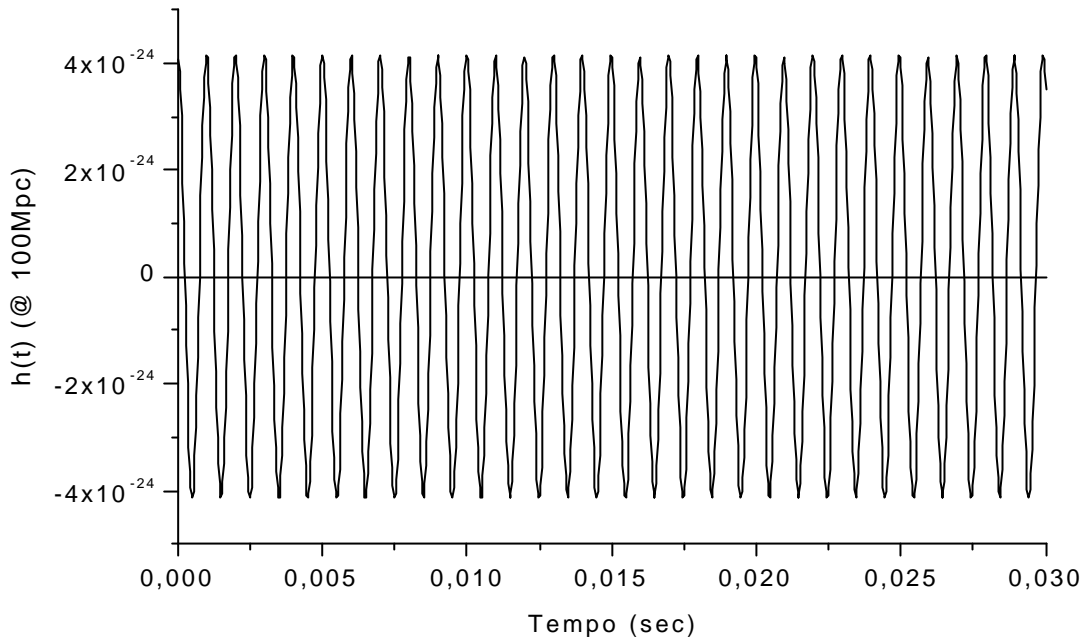


Figura 18. Ampiezza delle onde gravitazionali nella fase di crescita sospesa. La distanza sorgente-rilevatore è, come nel paragrafo precedente, pari a 100Mpc. A causa della piccolezza del fattore \dot{a} , che fa variare la frequenza, la funzione che le descrive è da considerarsi quasi monocromatica.

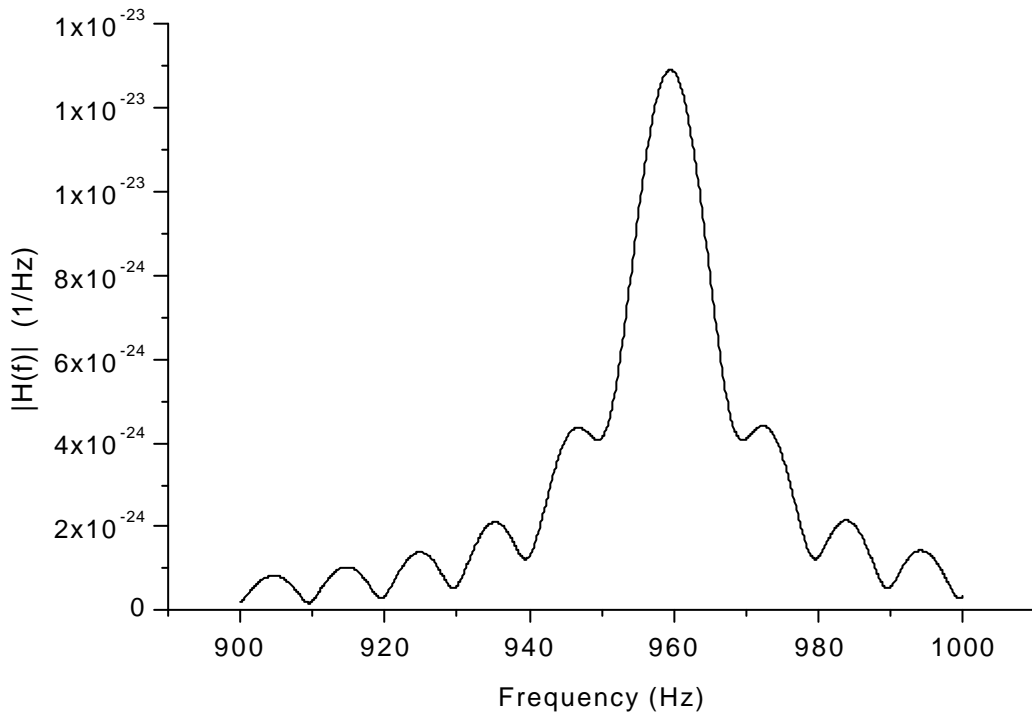


Figura 19. Valore assoluto della trasformata di Fourier del segnale ottenibile dall'emissione gravitazionale di un toro in rotazione attorno ad un buco nero in crescita sospesa, in funzione della frequenza.

Si può sottolineare, a questo punto, come il segnale risulti a segnatura ben definita, non piatto e indefinito come quelli prevedibili dai modelli impulsivi a cui si è accennato. Una curva come quella della **Figura 19** (o della precedente **Figura 18**), qualora venisse prodotta da un qualunque rivelatore di onde gravitazionali, sarebbe difficilmente equivocabile e costituirebbe una prova della plausibilità del modello buco nero-toro.

Se riscriviamo la complessa funzione (173) sotto la forma:

$$F(\omega) = r(\omega)e^{ij(\omega)} \quad (174)$$

calcoleremo la fase del segnale semplicemente come arcotangente del rapporto fra la parte immaginaria e quella reale della trasformata di Fourier:

$$j(\omega) = \text{arctg} \left[\frac{\text{Im}(F(\omega))}{\text{Re}(F(\omega))} \right] \quad (175)$$

Diamo quindi una rappresentazione grafica della fase del segnale (**Figura 20**).

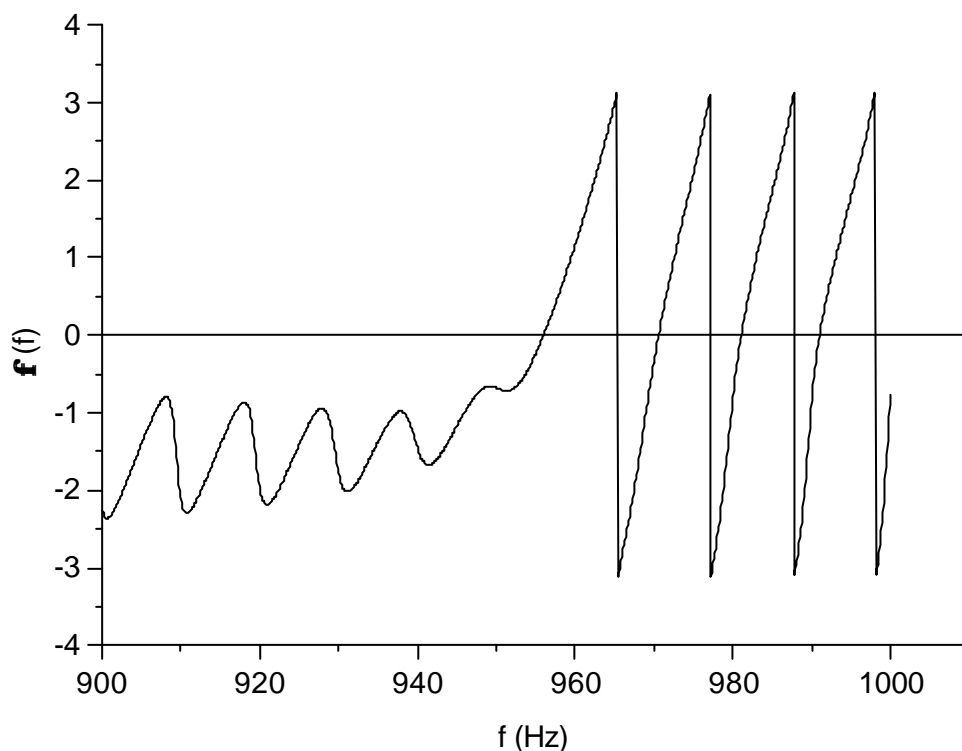


Figura 20. Fase del segnale emesso dal sistema buco nero-toro, durante la crescita sospesa, in funzione della frequenza.

4.4.3 Frequenza del segnale durante il ringdown

L'ultima fase d'interesse, per l'emissione gravitazionale, riguarda il periodo immediatamente successivo al collasso del toro.

Quando la materia in sospensione attorno al buco nero sottoforma di toro cesserà di consentirne la sospensione di crescita, collasserà attratta dal campo gravitazionale. L'improvviso aumento di massa causerà, nel buco nero di Kerr, il generarsi di una vibrazione chiamata "ringdown" (si veda Flanagan e Hughes, 1998). Con lo smorzarsi di quest'ultima oscillazione, il sistema cessa l'emissione di onde gravitazionali ed avremo il ramo discendente della curva di **Figura 14**.

La radiazione gravitazionale, in corrispondenza di quest'ultima fase, risulterà composta dalla sovrapposizione di sinusoidi smorzate esponenzialmente. Potremo considerare lo spettro di quest'emissione come generato esclusivamente dal "quasi-normal ringing" (QNR) la cui frequenza è caratterizzata da $l = m = 2$, che risulta essere la componente smorzata più lentamente. Sotto quest'ipotesi, lo spettro di energia si potrà approssimare con una delta di Dirac centrata nel valore di frequenza f_{QNR} , valutato da Flanagan e Hughes (1998) come:

$$f_{QNR} = \left[1 - 0.63(1-a)^{3/10} \right] (37M_{\odot}/M)865\text{Hz} \quad (176)$$

dove a è sempre il momento angolare specifico del buco nero di Kerr.

Facciamo a questo punto l'assunzione di considerare per lo spin un valore di $a = \frac{J_H}{M} = 0.98$. Questa scelta, seppure arbitraria, risulta ragionevole in virtù del fatto che la fase di "ringdown" di un sistema binario è la conclusione di una fase di spiraleggiamento, la quale presenta, nell'istante di massima vicinanza delle stelle, un momento angolare totale pari a $0.9M^2$. Non sarà quindi inverosimile supporre che, nella fase immediatamente successiva al collasso, il sistema abbia acquisito un momento angolare totale molto prossimo al valore massimo raggiungibile.

Assumendo perciò $a=0.98$, la formula (176) darà:

$$f_{QNR} \cong 3700 (7 M_{\odot}/M) \text{ Hz} \quad (177)$$

ovvero $f_{QNR} \cong 3700$ Hz per una massa $M \cong 7M_{\odot}$ come quella utilizzata finora per il buco nero. Di conseguenza la ω del segnale, in questa fase, sarà:

$$\omega_0 = 2\pi f_{QNR} = 2.3 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

Pertanto, il segnale durante il periodo successivo al collasso del toro avrà un'ampiezza:

$$h(t) = h_0 \cos(2\pi f_{QNR} t + \mathbf{j}_0) e^{-t/\hat{\tau}} \quad (178)$$

con ampiezza iniziale
$$h_0 \approx \frac{AM}{D} \frac{G}{c^2}$$

(si veda Flanagan e Hughes, 1998) dove:

- A è un coefficiente adimensionale che descrive, in modulo, l'intensità del fenomeno perturbativo quando il ringdown inizia. Questo valore è valutato da Flanagan e Hughes (1998) pari a circa $A = 0.4$, in base al confronto fra la luminosità dell'onda $(A^2 M^2 \frac{\omega_{QNR}^2}{16p})$ e l'emissione di un corpo ellissoidale di assi l^2 , l^2 ed $l^2(1 \pm \frac{3}{5} \sin(\omega t))$, assumendo l pari al raggio d'orizzonte del buco nero di Kerr e $\omega = 2\pi f_{QNR}$.
- M è la massa del buco nero (nel nostro caso $M \cong 7M_{\odot} \cong 14 \cdot 10^{30}$ Kg).
- f_{QNR} è la frequenza di “quasi normal ringing” calcolata prima (formula (177)).
- $\hat{\tau}$ è il tempo di smorzamento delle oscillazioni, definito in modo tale che:

$$Q = \pi \hat{\tau} f_{QNR}$$

mentre $Q \approx 2(1 - a)^{-9/20}$. Nel nostro caso $a=0.98$, quindi

$$Q \approx 11.63$$

$$\text{e } \hat{\tau} \approx 10^{-3} \text{ s}$$

- D, infine, è la distanza radiale a cui ci poniamo dalla sorgente (100 Mpc)

Quindi l'ampiezza h_0 sarà

$$h_0 \approx \frac{AM}{D} \frac{G}{c^2} \approx 2 \cdot 10^{-22} \left(\frac{100Mpc}{D} \right)$$

e, in base alla (178), in ogni istante, il nostro segnale avrà un'ampiezza:

$$h(t) = 2 \cdot 10^{-22} \left(\frac{100Mpc}{D} \right) \cos(2.3 \cdot 10^4 t + \mathbf{j}_0) e^{-t/10^{-3}} \quad (179)$$

il cui andamento è esplicitato nella prossima **Figura 21**.

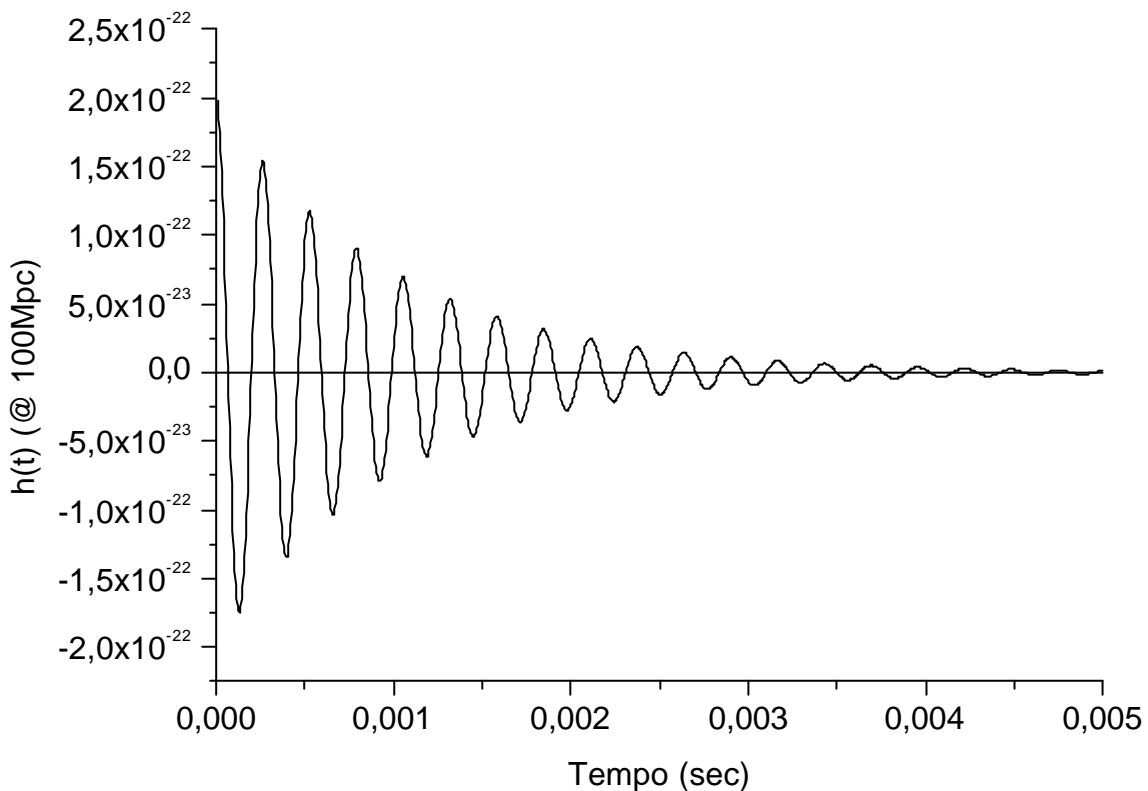


Figura 21. Andamento dell'ampiezza del segnale durante la fase di ringdown del buco nero ad una distanza D pari a 100Mpc. Si può notare che lo smorzamento esponenziale è molto rapido: in pochi millesimi di secondo l'ampiezza si annulla.

L'andamento, invece, della sua trasformata di Fourier, nel dominio della frequenza, sarà invece quello illustrato in **Figura 22**.

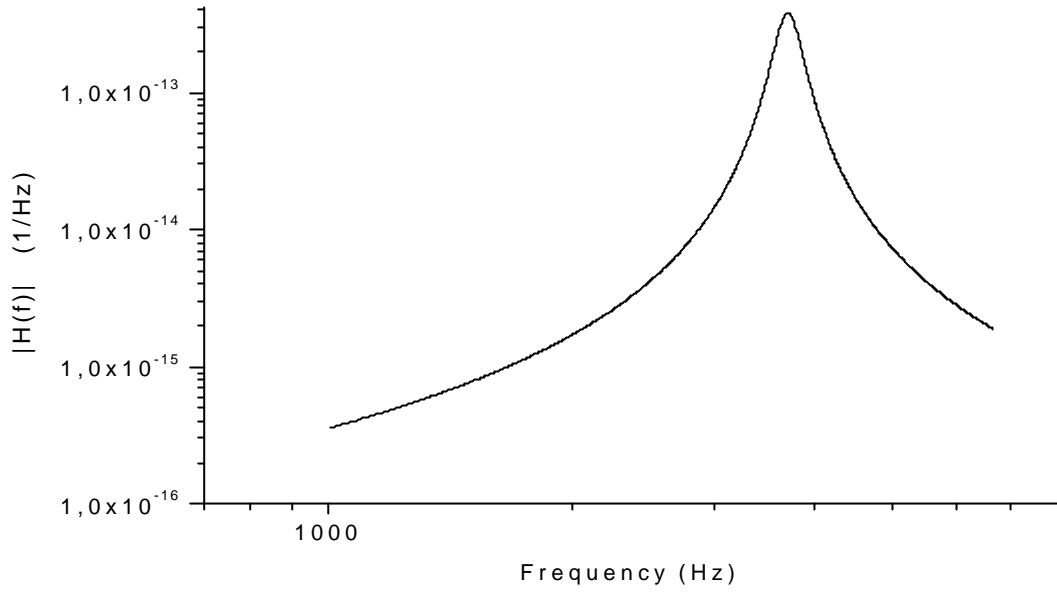


Figura 22. Andamento della trasformata di Fourier dell'ampiezza del segnale di ringdown in funzione della frequenza.

Se calcoliamo ora la fase del segnale del segnale, poichè:

$$f = f_{QNR} \cong 3700 (7 M_{\odot}/M) \text{ Hz}$$

allora
$$\mathbf{j} = \int \mathbf{w}(t) dt = 2\mathbf{p} f_{QNR} t = 2.3 \cdot 10^4 t \quad (180)$$

il cui andamento sarà quello di **Figura 23**:

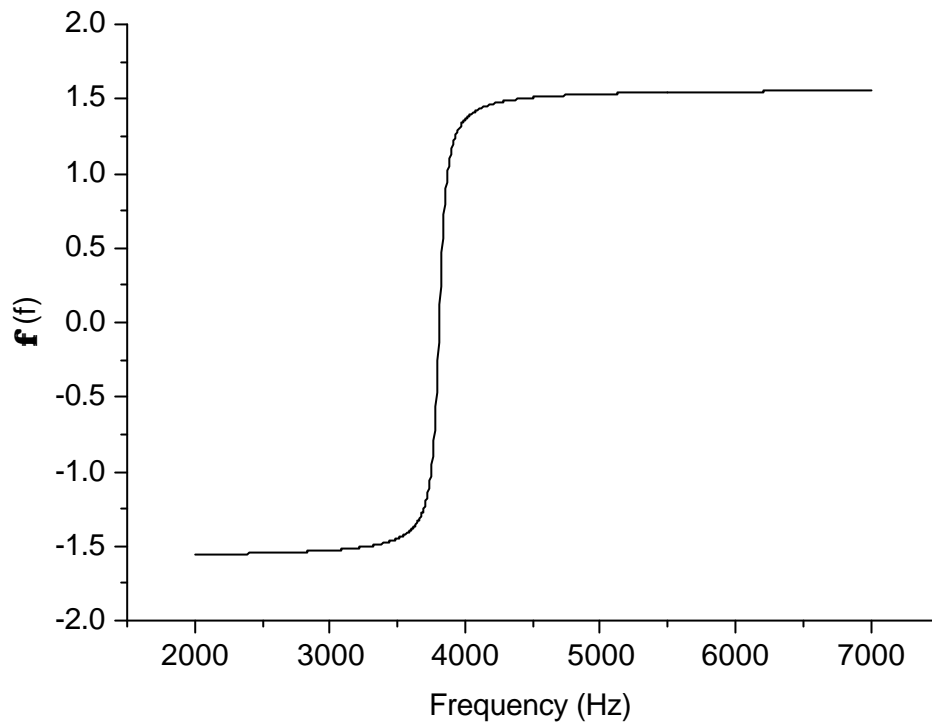


Figura 23. Fase del segnale di ringdown in funzione del tempo.

4.5 TRANSIZIONE FRA LE FASI DI FORMAZIONE, VITA E COLLASSO DEL SISTEMA BUCO NERO –TORO

Nel paragrafo precedente sono stati calcolati gli andamenti delle frequenze di segnale che prevediamo, rispettivamente, durante la fase di spiraleggiamento del chirp precursore, durante la sospensione di crescita del sistema buco nero-toro di accrescimento, e nella fase finale di ringdown del buco nero dopo il collasso del sistema stesso. E' difficile avanzare previsioni, invece, per quanto riguarda le fasi intermedie fra questi processi: vale a dire la fase che porta il sistema binario precursore ad originare il sistema buco nero-toro, e la fase di improvviso collasso che porta il toro a scomparire “inghiottito” dal buco nero che inizia a vibrare. Quindi, malgrado riusciamo a prevedere esattamente l'emissione gravitazionale nelle tre fasi, nulla sappiamo dell'emissione nelle due fasi intermedie. Tuttavia, ci sono buoni

motivi per pensare che, l'evoluzione fra i sistemi sia accompagnata da una transizione quasi-adiabatica tra l'uno e l'altro (si veda Buonanno e Damour, 2000); per questo motivo assumeremo che anche la transizione delle funzioni d'onda dei segnali, nelle diverse evoluzioni del sistema, segua lo stesso principio. Ci aspetteremo quindi, dall'intero fenomeno, un segnale continuo, composto dai tre segnali delle **Figure 15, 18 e 21**, in successione e che rispecchierà l'interna "storia" del sistema buco nero-toro. La durata complessiva del segnale sarà quindi la somma delle durate della fase iniziale del "chirp precursore" (che ha una durata variabile a seconda di quando iniziamo a rilevare il segnale), della fase intermedia di crescita sospesa (15-20 secondi) e della fase finale di ringdown (qualche millesimo di secondo).

Mentre la prima fase, quella relativa al sistema binario, interessa frequenze tipiche di un rilevatore di tipo interferometrico, il range di frequenze coperto dalla fase di crescita sospesa è quello caratteristico di rilevatori quali le barre di risonanza come AURIGA.

Analizziamo, nel capitolo che segue, come rileveremo il segnale previsto per la crescita sospesa con il rilevatore AURIGA.

4.6 RILEVAZIONE DEL SEGNALE CON AURIGA

L'antenna gravitazionale AURIGA si inserisce in una rete mondiale di progetti costituenti gli elementi di un unico telescopio terrestre, il cui scopo è quello di fondare la nascente astronomia gravitazionale. Attualmente sono disponibili due tipi di rilevatori di onde gravitazionali: quelli interferometrici e le antenne di risonanza. AURIGA fa parte di questa seconda famiglia: è costituita da un cilindro in alluminio sospeso per il baricentro che, investito da un'onda gravitazionale, dovrebbe vibrare longitudinalmente come un oscillatore armonico.

Il range tipico di frequenze in cui AURIGA potrà rilevare un segnale va dagli 840 ai 980 Hz di frequenza, con la sensibilità di **Figura 24**.

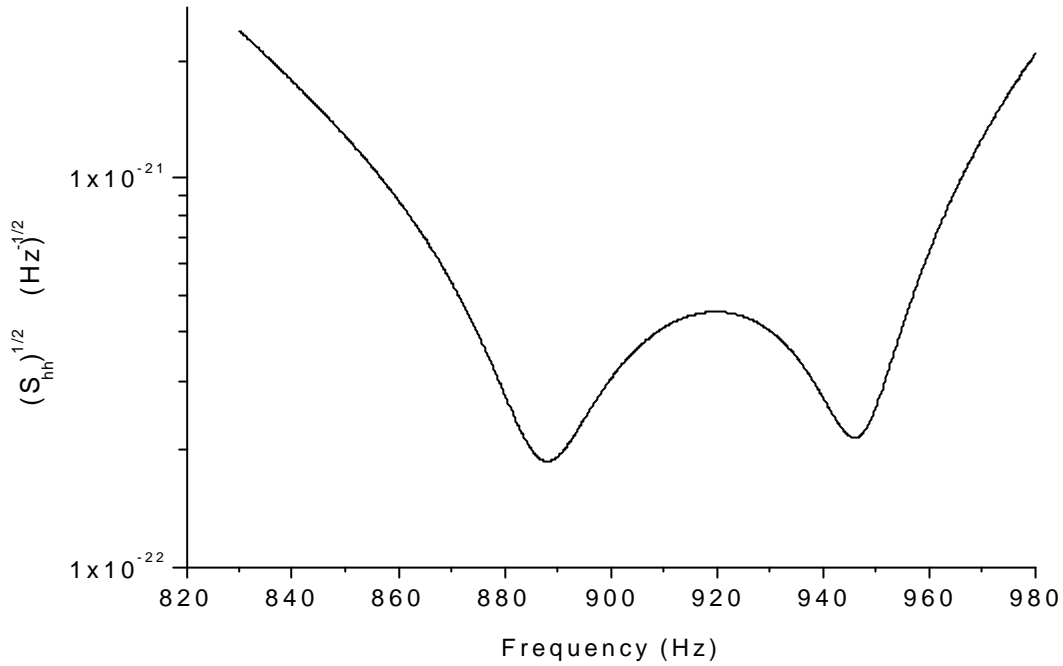


Figura 24. Sensibilità di AURIGA. Come si vede, questo tipo di barra di risonanza lavora in un range di frequenze che va dagli 840 ai 980 Hz, l'ideale per rilevare il segnale prodotto dal toro intorno ad 1 KHz. Sono visibili due minimi (uno attorno agli 890 ed uno attorno ai 950 Hz) in corrispondenza dei quali il rapporto segnale-rumore risulterà massimo.

Risulta significativo, a questo punto, valutare il rapporto (SNR^2) fra il segnale e il rumore di questo rivelatore. Esso sarà definito come:

$$SNR^2 = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H(\omega)|^2}{S_{hh}(\omega)} d\omega \quad (181)$$

$$SNR^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H(f)|^2}{S_{hh}(f)} df$$

dove con S_{hh} indichiamo la sensibilità di AURIGA mentre $H(\omega)$ è la trasformata di Fourier del segnale in crescita sospesa (si veda **Figura 19**).

La formula (181) può essere approssimata in questo modo:

$$SNR^2 \cong \frac{h_0^2 T_S}{S_{hh}(\min)} \quad (182)$$

dove abbiamo approssimato:

la trasformata di Fourier del segnale (periodico) con la sua ampiezza per la durata del segnale $T_S (\cong 15s) \Rightarrow H(f) \approx h_0 T_S$;

df con l'inverso della durata del segnale $\Rightarrow df \approx 1/T_S$;

e dove abbiamo considerato la sensibilità nel punto più a noi più conveniente: nel minimo (cioè $S_{hh}(\min) \cong (2 \cdot 10^{-22})^2 \text{ Hz}^{-1} \cong 4 \cdot 10^{-44} \text{ s}$, vedi **Figura 24**)

Riscriviamo ora h_0 in funzione della distanza D. Combinando assieme le formule (170), (171) e (172) del paragrafo 4.4.2, otterremo:

$$h_0 = \sqrt{\frac{G}{2\mathbf{p}^2 f_0^2 c^3} \frac{dE}{dt} \frac{1}{D}} \cong 4.4 \cdot 10^{-24} \left(\frac{100 \text{Mpc}}{D} \right) \quad (183)$$

Introducendo la formula appena calcolata nella (182), otterremo il rapporto segnale-rumore, per il rivelatore AURIGA, in funzione della distanza D a cui la sorgente d'emissione si trova rispetto al laboratorio:

$$SNR \cong \frac{4.4 \cdot 10^{-24} \cdot 15 \left(\frac{100 \text{Mpc}}{D} \right)}{2 \cdot 10^{-22}} \quad (184)$$

dalla (184), ponendo il rapporto segnale-rumore pari ad 1, troviamo la distanza massima alla quale il sistema buco nero-toro si deve trovare affinché AURIGA rilevi il segnale emesso:

$$D \cong 30 \text{Mpc}$$

Quindi, con un rivelatore come AURIGA, riusciremmo a rilevare distintamente un segnale di questo tipo fino ad una distanza di qualche decina di Mpc.

Anche se il valore ottenuto risulta un po' inferiore ai 100 Mpc auspicabili, è importante notare come questa distanza abbia una tendenza a crescere con lo sviluppo delle nuove tecnologie. Infatti, i rilevatori di onde gravitazionali (in particolare i

rilevatori di tipo interferometrico) potrebbero arrivare, in pochi anni, a sensibilità tali da portare il valore di D anche fino ad un centinaio di Mpc, quindi oltre il gruppo locale.

CONCLUSIONI

Il sistema buco nero-toro descritto in questa tesi, consistente nella sospensione di materiale barionico (sottoforma di un toro di accrescimento) in orbita attorno ad un buco nero di Kerr, presenta un'attività riconducibile, essenzialmente, a due fenomeni principali di uguale intensità: la produzione di coppie elettrone-positrone (rilasciate in un fascio collimato lungo l'asse di rotazione del buco nero), che costituiranno l'input per la formazione dei GRBs secondo il "modello fireball"; ed una consistente emissione di onde gravitazionali dal toro.

Pur riconoscendo nel modello una valida proposta per l'origine dei GRBs (essendo in accordo con molti aspetti legati alla loro fenomenologia, come l'origine cosmologica, la distribuzione bi-modale delle durate e la collimazione del burst), perveniamo alle conclusioni più interessanti analizzando il modello sotto il profilo di potente sorgente di radiazione gravitazionale.

La prevista emissione gravitazionale di circa 10^{53} ergs (confrontabile con l'enorme quantitativo di energia tipico di un GRB e con una durata di qualche decina di secondi) rivoluziona quella che, fino ad oggi, è stata la concezione delle onde gravitazionali, e fa dei GRBs un fenomeno (potenzialmente) legato alla sorgente di onde gravitazionali più potente nell'Universo. Nei modelli precedenti, infatti, l'ampiezza prevista per il segnale era sempre molto al di sotto della sensibilità dei migliori rivelatori, lasciando così poca speranza di essere misurata.

Il modello buco nero-toro, invece, prevede un segnale che, non solo è molto energetico (tanto da darci un'ampiezza d'onda ai limiti della rilevabilità di antenne gravitazionali quali AURIGA) ma la sua frequenza attorno al KHz, e la sua durata di alcuni secondi, favoriscono un segnale con una segnatura ben definita, difficilmente confondibile col rumore del rivelatore.

Appare chiaro perciò che, se si giungesse ad un qualche riscontro sperimentale consistente con il segnale teorizzato, questo modello potrebbe, non solo fare luce sulla probabile origine dei GRBs, ma consentirci di avere

informazioni, finalmente dirette, sulle onde gravitazionali, spianando così la strada all'astronomia gravitazionale.

RINGRAZIAMENTI

La mia riconoscenza va innanzitutto al mio relatore prof. Pierluigi Fortini, senza il cui aiuto la realizzazione di questa tesi non sarebbe stata possibile.

Un ringraziamento particolare va poi al mio correlatore dottor Antonello Ortolan e a tutti i componenti del gruppo AURIGA per la loro disponibilità e accoglienza, nonché per le numerose stimolanti discussioni e per avermi dato la possibilità di conoscere più da vicino l'ambiente sperimentale.

Ringrazio inoltre il dottor van Putten per la fitta corrispondenza di E-mail tenuta con il gruppo AURIGA, che ha permesso molte delucidazioni e precisazioni sui dettagli del modello trattato.

Un ringraziamento va infine ai professori Giovanni Firentini, Carlo Gualdi e Filippo Frontera della Facoltà di Fisica dell'Università di Ferrara, per i chiarimenti alle mie numerose lacune in ambito astrofisico e ai dottori Paolo Cesaretti e Francesco Longo per la collaborazione e l'aiuto offertimi.

APPENDICE A

La formula (47), ricavata nel paragrafo 1.6, esprime l'energia, per unità di tempo, emessa da un campo elettromagnetico sottoforma di radiazione bipolare. Esplicitiamo ora il momento di dipolo elettrico (come indicato da Shapiro e Teukolsky, 1983) per una pulsar che ruota uniformemente nel vuoto con una frequenza Ω .

Il momento di dipolo magnetico, in modulo, sarà

$$|\mathbf{m}_p| = \frac{1}{2} BR^3 \quad (\text{A1})$$

Se lo scriviamo invece sottoforma vettoriale, e chiamiamo α l'angolo che forma con l'asse di rotazione, avremo:

$$\dot{\mathbf{i}}_p = \frac{1}{2} BR^3 (\mathbf{e}_{//} \cos\alpha + \mathbf{e}_\perp \sin\alpha \cos\Omega t + \mathbf{e}'_\perp \sin\alpha \sin\Omega t) \quad (\text{A2})$$

dove:

$\mathbf{e}_{//}$ = vettore parallelo all'asse di rotazione,

\mathbf{e}_\perp e \mathbf{e}'_\perp = vettori ortogonali ad $\mathbf{e}_{//}$ e fra loro,

R = raggio della pulsar,

B = campo magnetico da essa supportato,

α = angolo formato dal campo magnetico B con il momento di dipolo elettrico

e Ω = velocità angolare

Otterremo quindi:

$$\dot{\mathbf{m}}_p = \frac{1}{2} BR^3 \Omega (-\mathbf{e}_\perp \sin\alpha \sin\Omega t + \mathbf{e}'_\perp \sin\alpha \cos\Omega t)$$

$$\ddot{\mathbf{m}}_p = \frac{1}{2} BR^3 \Omega^2 (-\mathbf{e}_\perp \sin\alpha \cos\Omega t - \mathbf{e}'_\perp \sin\alpha \sin\Omega t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{m}}_{p_j} \ddot{\mathbf{m}}_{p_j} &= \frac{1}{4} B^2 R^6 \Omega^4 \sin^2 \alpha (\cos^2 \Omega t + \sin^2 \Omega t) \\ &= \frac{1}{4} B^2 R^6 \Omega^4 \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Ricordando la (47):

$$L_{em} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{a}_j \ddot{a}_j \quad (A4)$$

e sostituendo la (A3) avremo:

$$L_{em} = \frac{B^2 R^6 \Omega^4}{6c^3} \sin^2 \alpha \quad (A5)$$

La formula (A5) rappresenta perciò la radiazione emessa, sottoforma di onde elettromagnetiche, da una pulsar in rotazione con una velocità angolare Ω , il cui momento di dipolo magnetico forma un angolo α rispetto all'asse di rotazione.

APPENDICE B

Valutiamo il corrispettivo dell'emissione gravitazionale (data dalla formula (48) del par 1.6) per un sistema costituito da due masse puntiformi M ed m . Definiamo la massa ridotta in questo modo (vedi Shapiro e Teukolsky, 1983):

$$Ma_1 = ma_2 = \mu a \qquad \mathbf{m} = \frac{mM}{m+M} \qquad (B1)$$

(con a_1 ed a_2 distanze di M ed m dal centro di massa del sistema). Se diciamo sia z l'asse di rotazione, e chiamiamo ϕ l'angolo formato dall'asse delle x con la linea che congiunge le masse, i momenti d'inerzia risulteranno essere:

$$I_{xx} = (Ma_1^2 + ma_2^2) \cos^2 \phi = \frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi + \text{costante}$$

$$I_{yy} = -\frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi + \text{costante}$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{1}{2} \mu a^2 \sin 2\phi$$

Derivando rispetto al tempo avremo:

$$\dot{I}_{xx} = -\Omega \mu a^2 \sin 2\phi$$

$$\ddot{I}_{xx} = -2 \Omega^2 \mu a^2 \cos 2\phi$$

$$\ddot{I}_{xx} = 4 \Omega^3 \mu a^2 \sin 2\phi$$

$$\dot{I}_{yy} = \Omega \mu a^2 \sin 2\phi$$

$$\ddot{I}_{yy} = 2 \Omega^2 \mu a^2 \cos 2\phi$$

$$\ddot{I}_{yy} = -4 \Omega^3 \mu a^2 \sin 2\phi$$

$$\dot{I}_{xy} = \Omega \mu a^2 \cos 2\phi$$

$$\ddot{I}_{xy} = -2 \Omega^2 \mu a^2 \sin 2\phi$$

$$\ddot{I}_{xy} = -4 \Omega^3 \mu a^2 \cos 2\phi$$

dove Ω è definita in questo modo: $\Omega = \dot{\phi} / t$

La (48) diventerà

$$L_{GW} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle \qquad (B2)$$

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} 16 \Omega^6 m^2 a^4 \langle \sin^2 2\Omega t + \sin^2 2\Omega t + 2 \cos^2 2\Omega t \rangle$$

$$L_{GW} = \frac{16}{5} \frac{G}{c^5} \Omega^6 m^2 a^4 2 \qquad (B3)$$

Per finire, consideriamo come la velocità angolare Ω del sistema si possa scrivere come:

$$\Omega = \sqrt{G \frac{m+M}{a^3}} \quad (\text{B4})$$

secondo la legge di Keplero applicata ad un sistema binario (si veda, ad esempio, Peters e Mathews, 1963). Sostituendo la formula (B4) e la definizione (B1) nella (B3), avremo:

$$L_{GW} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^2 m^2 (M + m)}{a^5} \quad (\text{B5})$$

La formula (B5) rappresenta perciò la radiazione emessa, sottoforma di onde gravitazionali, dal sistema di masse puntiformi M ed m.

BIBLIOGRAFIA:

Misner C. W., Thorne K. S., e Wheeler J. A. (1973), *Gravitation.*, W. H. Freeman Ed.; New York, N. Y.

Landau L. e Lifšic E. (1964), *Classical Field Theory*, Cambridge Univ. Press.

van Putten M. H. P. M. (2001a), *Gamma-ray bursts: LIGO/VIRGO sources of gravitational radiation*, *Phys. Rep.* **345**, 1.

Katz J. I. e Canel L. M. (1996), *The long and the short of gamma-ray bursts*, *ApJ.* **471**, 915.

Piran T. (1999), *Gamma-ray bursts and the fireball model*, *Phys. Rep.* **314**, 575.

Sari R. e Piran T. (1997), *Variability in GRBs-A clue*, (arXiv:astro-ph/ 9701002).

Rees M. J. e Mészáros P. (1997), *Refreshed shocks and afterglow longevity in GRB*, (arXiv:astro-ph/ 9712252).

Costa E. et al. (1997), *Nature* **386**, 783.

Paczynski B. (1997), *Gamma-ray bursts as hypernovae*, (arXiv:astro-ph/9706232 v1).

Narayan R. e Piran T. (1993), *Do gamma-ray burst sources repeat?*, (arXiv:astro-ph/9308007).

van Putten M. H. P. M. (2001b), *Gamma-ray bursts and gravitational radiation from black hole-torus systems*, (arXiv:astro-ph/0109429 v1).

Thorne K. S., Price R. H. e MacDonald D. A. (1986), *Black Holes: The Membrane Paradigm*, Yale University Press, New Haven and London.

van Putten M. H. P. M e Ostriker E. C. (2001), *Hyper-and suspended-accretion states of rotating black holes and the durations of gamma-ray bursts*, ApJ. Lett. **552**, L31, (arXiv:astro-ph/0010440 v2).

Wald R. M. (1974), *Black hole in a uniform magnetic field*, Phys. Rev. D **10**, n°6, 1680.

van Putten M. H. P. M. (2001c), *Proposed Source of Gravitational Radiation from a Torus around a Black Hole*, Phys. Rev. Letters **87**, n°9, 091101.

Hawking S. W. (1976), *Black holes and thermodynamics*, Phys. Rev. D **13** 191.

van Putten M. H. P. M. (2001d), *Gravitational radiation from long gamma-ray bursts*, (arXiv:gr-qc/0102043 v1).

Shapiro S. L. e Teukolsky S. A. (1983), *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Wiley, New York.

van Putten M. H. P. M. (1999), *Superradiance in a Torus Magnetosphere Around a Black Hole*, Science **284**, 115.

van Putten M. H. P. M. e Levinson A. (2001), *Calorimetry of gamma-ray bursts: echos in gravitational waves*, ApJ. **555**, L41 (arXiv:astro-ph/0105429).

Peters P. C. e Mathews J. (1963), *Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit*, Phys. Rev. **131**, n°1, 435.

Piran T. e Ayal S. (2001), *GRB Remnants*, Invited talk at the 2001 Woodshole meeting, "Gamma-Ray Bursts and Afterglow Astronomy".

Flanagan E. E. e Hughes S. A. (1998), *Measuring gravitational waves from binary black hole coalescences: I. Signal to noise for inspiral, merger, and ringdown*, Phys. Rev. D **57**, 4535, (arXiv:gr-qc/9701039 v2).

Buonanno A. e Damour T. (2000), Phys. Rev. D **62** , 064015.